

Von Jahres- zu Quartalswerten – ohne unterjährig Informationen

Udo Vullhorst

Was tun, wenn unterjährig Daten benötigt werden, die entsprechenden Zeitreihen jedoch nur Jahreswerte ausweisen? Das Mittel der Wahl ist üblicherweise eine temporale Disaggregation mit höherfrequenten Indikatorzeitreihen, wie es beispielsweise für die Berechnung des quartalsweisen Bruttoinlandsprodukts Baden-Württembergs Anwendung findet. Mitunter liegen angemessene Indikatorzeitreihen jedoch nicht immer vor. *Lisman* und *Sandee* haben bereits vor einem halben Jahrhundert ein Verfahren vorgeschlagen, wie Quartalswerte allein aus den Jahreswerten generiert werden können, indem angenommen wird, dass die Quartalswerte einem „glatten Trend“ folgen.¹ Bis heute findet dieses bewährte Verfahren nicht nur in der amtlichen Statistik Deutschlands Anwendung. Am Beispiel des nominalen Bruttoinlandsprodukts für Baden-Württemberg wird illustriert, dass die als gewichtete Durchschnitte von Jahreswerten berechneten Quartalswerte die Trend-Konjunktur-Komponente einer Reihe mit ausgeprägtem saisonalem Muster recht gut approximieren.

Quartalswerte als gewichteter Durchschnitt von Jahreswerten

Ausgangspunkt der Überlegungen ist, dass die unbekannten Quartalswerte (y_t^I) eine Funktion des Jahreswertes x_t sowie der angrenzenden Jahre x_{t-1} und x_{t+1} seien:

$$(1) \quad \begin{pmatrix} y_t^I \\ y_t^{II} \\ y_t^{III} \\ y_t^{IV} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & e & d \\ b & f & c \\ c & f & b \\ d & e & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_{t-1} \\ x_t \\ x_{t+1} \end{pmatrix}$$

Die 4x3-Disaggregationsmatrix in (1) enthält lediglich sechs unbekannte Parameter, da *Lisman* und *Sandee* diverse Plausibilitätsannahmen ausgenutzt haben. Der Umstand, dass die dritte Spalte in umgekehrter Reihenfolge der ersten entspricht, erklärt sich dadurch, dass, wenn das „Randjahr“ x_{t-1} mit dem Faktor a in das Anfangsquartal y_t^I eingeht, x_{t+1} aus Gründen der Symmetrie mit dem gleichen Gewicht in das Endquartal y_t^{IV} eingehen sollte usw. Das Muster der Parameter in der zweiten Spalte

folgt einer ähnlichen Logik. Das Gewicht des Jahreswertes x_t sollte für die Berechnung des Anfangs- und Endquartals des Jahres t gleich sein (Parameter e). Ebenso sollten die Parameter für das 2. und 3. Quartal übereinstimmen (Parameter f). Die Disaggregationsmatrix in (1) enthält die simpelste Möglichkeit, Quartalswerte zu erzeugen, als Spezialfall. Wenn die Parameter der ersten und der dritten Spalte gleich null gesetzt werden und $e = f = 1/4$, dann teilt sich der Jahreswert gleichmäßig auf die 4 Quartale auf und der Jahreswert ergibt sich aus der Summe der 4 Quartale. Für $e = f = 1$ stimmen die Quartalswerte mit dem Jahreswert überein, was offensichtlich dann angemessen ist, wenn sich der Jahreswert aus dem Durchschnitt der 4 Quartale berechnet. Von einem glatten Trend kann bei dieser Berechnung natürlich keine Rede sein. Zum Jahreswechsel erhält man Sprünge. Insofern sind plausiblere Annahmen bezüglich der Parameter zu treffen.

Mit den Symmetrieannahmen ist die potenzielle Anzahl der Parameter schon von zwölf auf sechs reduziert worden. Um die verbliebenen sechs Parameter bestimmen zu können, benötigt man linear unabhängige Gleichungen in entsprechender Anzahl. Hier sind zunächst die Informationen auszunutzen, die sich aus der Restriktion ergeben, wonach sich die vier Quartalswerte zum Jahreswert ergänzen müssen. *Lisman* und *Sandee* behandeln in ihrem Aufsatz den Fall, dass sich der Jahreswert x_t aus dem Durchschnitt der 4 Quartale ergibt,

$$\text{also } x_t = 1/4 \sum_{i=1}^4 y_t^i = 1/4 X_t. \text{ Hieraus folgt}$$

unmittelbar, dass

$$(2) \quad a + b + c + d = 0$$

gelten muss, da nur so gewährleistet ist, dass sich zum einen der Einfluss der Nachbarjahre x_{t-1} und x_{t+1} auf die Quartalswerte des Jahres t zum Jahreswert aggregiert aufhebt. Zum anderen muss die Summe der Quartale dem vierfachen Jahreswert entsprechen ($X_t = 4x_t$), woraus die Bedingung folgt:

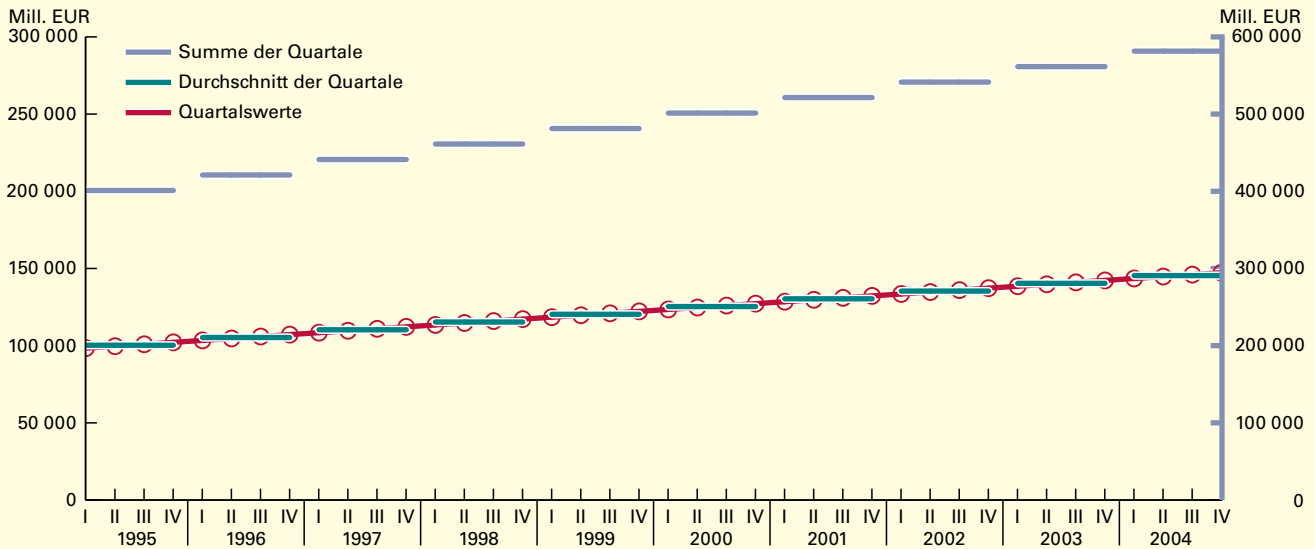
$$(3) \quad 2(e + f) = 4$$



Dipl.-Staatswissenschaftler Dr. Udo Vullhorst ist Referent im Referat „Finanz- und Wirtschaftspolitik in Europa“ des Ministeriums für Finanzen und Wirtschaft Baden-Württemberg.

¹ Lisman, J. H. C./Sandee, J. (1964): Derivation of Quarterly Figures from Annual Data, in: Journal of the Royal Statistical Society, Series C (Applied Statistics), Bd. 13 (2), S. 87–90.

S1 Jahreswerte als Summe bzw. Durchschnitt der BIP-Quartalswerte (fiktive Werte)



Erläuterung: Ein konstanter Anstieg von Quartalswerten lässt die Jahreswerte um den Faktor 4 (wenn der Jahreswert dem Quartalsdurchschnitt entspricht) bzw. 16 steigen (wenn der Jahreswert gleich der Quartalssumme ist).

Statistisches Landesamt Baden-Württemberg

402 15

Weitere Bedingungen für die Parameter der Disaggregationsmatrix erhält man, wenn man vom Spezialfall konstanter Jahreswerte

$x_{t-1} = x_t = x_{t+1}$ ausgeht. In diesem Fall ergeben sich $(a + e + d)x_t = 1/4 X_t$ und $(b + f + c)x_t = 1/4 X_t$.

Damit die Bedingung $x_t = 1/4 \sum_I y_t^i = 1/4 X_t$ erfüllt ist, muss gelten:

$$(4) \quad a + e + d = 1 \text{ und}$$

$$(5) \quad b + f + c = 1$$

Von den Gleichungen (2) bis (5) sind jedoch nur drei linear unabhängig; die Koeffizienten von (2), (4) und (5) sind jeweils als Linearkombination der übrigen beiden Gleichungen darstellbar.

Weitere Bedingungen für die Bestimmung der Parameter leiten sich aus folgender Überlegung ab. Wenn sich die Jahreswerte x_t um einen konstanten Betrag p verändern, dann müssen sich auch die Quartalswerte um einen konstanten Betrag verändern, und zwar im Vergleich zum Vorjahresquartal um p und von

T Auszug aus der Wertetabelle zu Schaubild 1

Jahr	Quartal	Quartalswerte	Jahreswerte, Σ der Quartale	Jahreswerte, \bar{Q} der Quartale	Veränderung Y/Y	Veränderung Q/Q
		Mill. EUR				
1995	I	98 125	400 000	100 000	–	–
	II	99 375	400 000	100 000	–	1 250
	III	100 625	400 000	100 000	–	1 250
	IV	101 875	400 000	100 000	–	1 250
1996	I	103 125	420 000	105 000	5 000	1 250
	II	104 375	420 000	105 000	5 000	1 250
	III	105 625	420 000	105 000	5 000	1 250
	IV	106 875	420 000	105 000	5 000	1 250
1997	I	108 125	440 000	110 000	5 000	1 250
	II	109 375	440 000	110 000	5 000	1 250
	III	110 625	440 000	110 000	5 000	1 250
	IV	111 875	440 000	110 000	5 000	1 250

Quartal zu Quartal um $1/4 p$ (*Schaubild 1 und Auszug aus der Wertetabelle*); anders ausgedrückt: $y_t^I - y_t^{I-1} = 1/4 p$. Unter Berücksichtigung der ersten beiden Gleichungen aus (1) ergibt sich aus $y_t^{II} - y_t^I = 1/4 p$:

$$1/4 p = (b-a)x_{t-1} + (f-e)x_t + (c-d)x_{t+1}$$

Wenn nun $x_{t-1} = x_t - p$ und $x_{t+1} = x_t + p$ substituiert werden,² erhält man unter Berücksichtigung von (4) und (5):

$$(6) \quad a - b + c - d = 1/4$$

Für $y_t^{III} - y_t^{II} = 1/4 p$ erhält man entsprechend:

$$(7) \quad 2(b-c) = 1/4$$

Lisman und Sandee weisen darauf hin, dass durch weitere Subtraktionen keine weiteren Restriktionen für die Parameter hergeleitet werden können, eben aufgrund der Symmetrieannahme. Auch aus der Bedingung, wonach für die Vorjahresveränderung der Quartalswerte $y_t^I - y_{t-1}^I = p$ gilt, folgen keine neuen Restriktionen, sondern lediglich wieder die Gleichungen (4) und (5).

Annahme zum Verlauf Trend-Konjunktur-Komponente

Damit hat man fünf linear unabhängige Gleichungen und sechs Parameter. Definiert man einen beliebigen Parameter als arbiträre Größe (hier wurde $c = \gamma$ gesetzt), liefert das Gleichungssystem (2) bis (7) die Lösung.

$$\begin{pmatrix} y_t^I \\ y_t^{II} \\ y_t^{III} \\ y_t^{IV} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/8 & 9/8 & -1/4 \\ 1/8 & 7/8 & 0 \\ 0 & 7/8 & 1/8 \\ -1/4 & 9/8 & 1/8 \end{pmatrix} + \gamma \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_{t-1} \\ x_t \\ x_{t+1} \end{pmatrix}$$

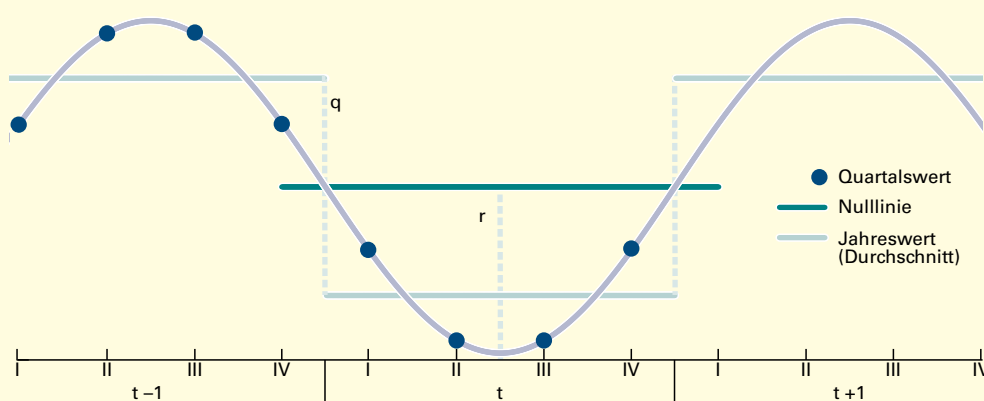
Auf den ersten Blick mag dieses Ergebnis ein anderes als das von *Lisman* und *Sandee* sein. Jedoch muss berücksichtigt werden, dass es sich bei γ um eine arbiträre Konstante handelt. Setzt man also $\gamma = -(1+\alpha)/16$, so sind die Lösungen identisch:

$$\begin{pmatrix} y_t^I \\ y_t^{II} \\ y_t^{III} \\ y_t^{IV} \end{pmatrix} = \left\{ \frac{1}{16} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 16 & -3 \\ 1 & 16 & -1 \\ -1 & 16 & 1 \\ -3 & 16 & 3 \end{pmatrix} + \frac{\alpha}{16} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \right\} \cdot \begin{pmatrix} x_{t-1} \\ x_t \\ x_{t+1} \end{pmatrix}$$

Schließlich ist noch ein angemessener Wert für α zu finden, der für die entsprechenden glatten Werte sorgt. Die Autoren machen hierzu einen bemerkenswerten Vorschlag, der Orientierungshilfe gibt. Angenommen, die Jahreswerte verliefen alternierend mit einem sinusoidalen Verlauf der zu ermittelnden glatten Quartalswerte, den man als Trend-Konjunktur-Zyklus bezeichnen kann (*Schaubild 2*; die Abbildung basiert auf *Lisman/Sandee*, wurde jedoch ergänzt), dann gilt, wenn q die Differenz zwischen zwei Jahreswerten und r die Amplitude ist, für beide Größen stets die Beziehung $r/q = 0,765$, die man sich zunutze machen kann. Es gilt $y_t^{II} - y_t^I = 0,765q(\sin 67,5^\circ - \sin 22,5^\circ) = 0,414q$. Aus den ersten beiden Gleichungen aus (1) folgt diesmal:

$$0,414q = (b-a)x_{t-1} + (f-e)x_t + (c-d)x_{t+1}$$

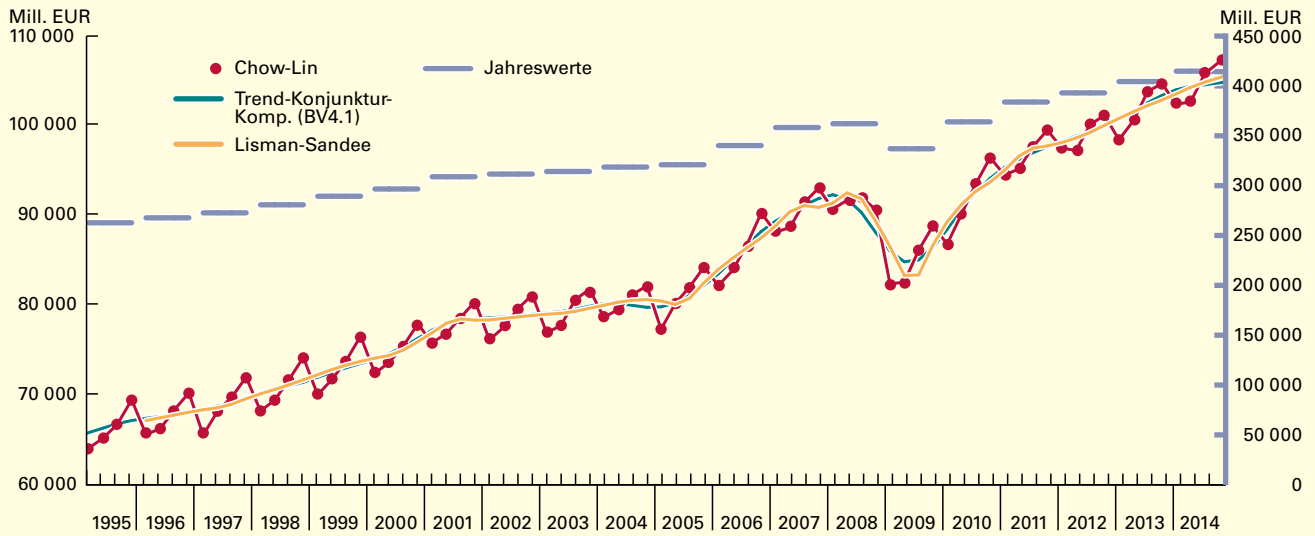
S2 Hypothetischer Trend-Konjunktur-Verlauf



Erläuterung: Ein angenommener Verlauf der Trend-Konjunktur-Komponente. Die Amplitude der sinusoidalen Kurve (r) und die Differenz der Jahreswerte (q) stehen in einem festen Verhältnis zueinander (hier: Jahreswerte gleich Quartalsdurchschnitt).

2 Der im Text von *Lisman* und *Sandee* an dieser Stelle eingefügte Koeffizient vor p ist folglich ein Druckfehler.

S3 BIP (in jeweiligen Preisen) für Baden-Württemberg 1995 bis 2014



Erläuterung: Empirische BIP-Quartalswerte und solche, die nach Lisman-Sandee aus den Jahreswerten berechnet wurden.

Statistisches Landesamt Baden-Württemberg

404 15

Das weitere Verfahren folgt dem Prinzip der Herleitung von (6). Jedoch muss hier (da ja für x_t ein alternierender Verlauf angenommen wurde) $x_{t-1} = x_t - q$ bzw. $x_{t+1} = x_t + q$ substituiert werden³, sodass man als weitere unabhängige Bedingung erhält:

$$a - b + c - d = 0,414$$

Für a , b , c und d sind die Lösungen aus obigem Gleichungssystem einzusetzen, die nur noch von α abhängig sind. Aufgelöst erhält man $\alpha = -1,656$, womit auch die obige Distributionsmatrix bestimmt ist.

Der andere Fall: Jahreswerte gleich Jahressumme

Lisman und Sandee behandeln den Fall, wonach der Jahreswert dem Durchschnitt der

4 Quartale entspricht ($x_t = 1/4 \sum_{i=1}^4 y_t^i = 1/4 X_t$).

Dies ist beispielsweise bei den als Kettenindex veröffentlichten BIP-Quartalswerten der Fall. Betrachtet man dagegen die Absolutwerte, so berechnet sich der Jahreswert als Summe der

4 Quartalswerte ($x_t = \sum_{i=1}^4 y_t^i = X_t$, siehe

Schaubild 1). Das Lisman-Sandee-Verfahren lässt sich natürlich problemlos auf diesen Fall übertragen. Gleichung (2) bleibt unverändert. Die übrigen modifizieren sich zu:

$$(2) \quad a + b + c + d = 0$$

$$(3^{\text{mod}}) \quad 2(e + f) = 1$$

$$(4^{\text{mod}}) \quad a + e + d = 1/4$$

$$(5^{\text{mod}}) \quad b + f + c = 1/4$$

$$(6^{\text{mod}}) \quad a - b + c - d = 1/16$$

$$(7^{\text{mod}}) \quad 2(b - c) = 1/16$$

Auch hier hat man wieder fünf linear unabhängige Gleichungen und sechs Parameter. Setzt man $c = \gamma$ liefert das Gleichungssystem (2) bis (7^{mod}) die Lösung:

$$\begin{pmatrix} y_t^I \\ y_t^{II} \\ y_t^{III} \\ y_t^{IV} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/32 & 9/32 & -1/16 \\ 1/32 & 7/32 & 0 \\ 0 & 7/32 & 1/32 \\ -1/16 & 9/32 & 1/32 \end{pmatrix} + \gamma \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_{t-1} \\ x_t \\ x_{t+1} \end{pmatrix}$$

Ganz analog zu Lisman und Sandee ist γ zu bestimmen. Das Verhältnis von Amplitude und Differenz der Jahreswerte ist $r = 0,1913 q$. Also erhält man unter Berücksichtigung der ersten beiden Gleichungen aus (1):

$$0,1913q = (b - a)x_{t-1} + (f - e)x_t + (c - d)x_{t+1}$$

Die Substitution von $x_{t-1} = x_t - q$ und $x_{t+1} = x_t + q$ liefert unter Berücksichtigung der Lösung des Gleichungssystems (2) bis (7^{mod}) für die arbiträre Konstante den Wert $\gamma = -0,0415$.

3 Auf der linken Seite der zweiten Gleichung ist im Ursprungstext der Zeitindex zu korrigieren.

Das Lisman-Sandee-Verfahren wird beispielsweise vom Statistischen Bundesamt angewendet, um die FuE-Ausgaben, die als Jahresdaten erhoben werden, auf Quartale zu verteilen.⁴ Für die dort verwendete Distributionsmatrix wurde (implizit) $\gamma = -3/64 = -0,0469$ gewählt, was dem von *Lisman* und *Sandee* vorgeschlagenen Wert einigermaßen entspricht. Der genaue Wert würde am Verlauf der geglätteten Quartalswerte kaum etwas ändern. Schließlich handelt es sich um einen Parameter, der „largely arbitrary“ und „in a commonsense way“ zu wählen ist, sodass es einen gewissen Spielraum gibt.

Wie gut die Lisman-Sandee-Methode eine Zeitreihe mit ausgeprägtem saisonalen Muster approximiert, sieht man beispielhaft am nominalen quartalsweisen Bruttoinlandsprodukt Baden-Württembergs (*Schaubild 3*). Diese Zeitreihe wird mit dem indikatorgestützten Chow-Lin-Verfahren berechnet. Die saisonalen Schwankungen der zugrunde liegenden Indikatoren finden sich aggregiert in den BIP-Quartalswerten wieder. Diese Quartalswerte veranschaulichen, dass die Lisman-Sandee-Distribution tatsächlich eine saisonbereinigte Trend-Konjunktur-Komponente approximiert. Die Annahme, dass die Quartalswerte einem glatten Trend folgen, ist damit nicht lediglich eine der Optik geschuldete Ad-hoc-Annahme, sondern durchaus gerechtfertigt.

Bleibt noch das „Endpunktproblem“ zu lösen. Das erste und das letzte Jahr der Zeitreihe fällt dem Glättungsverfahren konstruktionsbedingt zum Opfer. Hier kann man sich behelfen, indem die Reihe über den aktuellen Rand hinaus extrapoliert wird, im Beispiel mit einem ARIMA-Modell. Der für 2015 extrapolierte BIP-Jahreswert erlaubt nun auch eine Lisman-Sandee-Quartalszerlegung für 2014. Man sieht, dass sich die Lisman-Sandee-Werte auch am aktuellen Rand recht gut an die mit dem Saisonbereinigungsverfahren erzeugte Trend-Konjunktur-Komponente anschmiegen. Aufgrund der Tatsache, dass drei Jahreswerte berücksichtigt werden, ist die Quartalszerlegung gegenüber eventuellen Prognosefehlern relativ unempfindlich.

Das Lisman-Sandee-Verfahren zeigt einen Weg auf, wie eine temporale Disaggregation vorgenommen werden kann, wenn über den unterjährigen Verlauf der Zeitreihe, insbesondere etwaige saisonale Muster, nichts bekannt ist. Die Herangehensweise ist daher zwangsläufig „agnostisch“, führt jedoch bei einfacher Umsetzbarkeit zu plausiblen Resultaten, wie das behandelte Beispiel zeigt. ■

Weitere Auskünfte erteilt
Dr. Udo Vullhorst, Telefon 0711/123-2369,
Udo.Vullhorst@mfw.bwl.de

4 Adler, W. u.a.: Forschung und Entwicklung in den Volkswirtschaftlichen Gesamtrechnungen, in: *Wirtschaft und Statistik* 12/2014, S. 703-717.

Buchbesprechung

Reinhard Güll

In seinem neuen im Silberburg-Verlag erschienenen Buch zeichnet der Freiburger Forstwissenschaftler *Peter Gürth* 5 000 Jahre Geschichte von Wald und Mensch im heutigen Baden-Württemberg nach und erzählt von der Rückkehr des Waldes nach der Eiszeit, vom ungeheuren Holzverbrauch der Römer und den ersten Rodungen des Mittelalters. *Gürth* schildert die Entwicklung im 19. Jahrhundert, die die moderne Forstwirtschaft einläutete. Ab da traten Fichte und Kiefer ihren Siegeszug an, den spätere Generationen mit hohem Aufwand wieder rückgängig zu machen suchten. Was bis heute nur zum Teil gelang. Das 20. Jahrhundert stellte den Menschen im Wald vor neue Herausforderungen: Borkenkäfer, Waldsterben und starke Sturmschäden.

*Peter Gürth*s Werk ist chronologisch strukturiert. Es beginnt bei den ersten Schachtelhalmwäldern. Er streift auch die Geschichte der Nützlichkeit des Waldes für die Viehzucht im Mittelalter, bevor die dunklen Seiten des Waldes als Heimat der Räuber untersucht werden. Wie wichtig der Wald für Glashütten, Salinen und

Bergwerke war, wird ebenso analysiert wie der Missbrauch des Waldes als höfisches Jagdrevier. Am Ende des Buches wird auch auf den heute hoch im Kurs stehenden naturnahen Waldbau eingegangen, indem die Frage untersucht wird: Ist der moderne naturnahe Waldbau die Antwort auf die drängenden ökologischen Probleme unserer Zeit?

Der vorliegende Band ist die erste umfassende Geschichte von Mensch und Wald im deutschen Südwesten, die sich an breites Lesepublikum wendet. Allen, die den Wald in all seinen Facetten kennenlernen wollen, ist *Peter Gürth*s Werk zur Lektüre zu empfehlen.

Bibliografische Angaben:

Peter Gürth: *Wer hat dich, du schöner Wald*. 240 Seiten, 110 meist farbige Abbildungen, gebunden, Silberburg-Verlag, Tübingen und Karlsruhe, 24,90 Euro, erhältlich im Buchhandel. ISBN 978-3-8425-1333-4

