

# Leibrente – ein einfacher Begriff mit komplexem Hintergrund

Helmut Hirtz

Die Absenkung der Leistungen öffentlicher Versorgungseinrichtungen erfordert eine ergänzende private Vorsorge für das Alter. Eine Mischung der für die Altersvorsorge in Frage kommenden Anlagemöglichkeiten ist immer noch ein probates Mittel. In bestimmten Fällen könnten dazu auch Kaufgeschäfte auf Leibrentenbasis zählen. Allerdings mangelt es hierfür an aktuellen Datennachweisen für Deutschland. Die derzeit verfügbaren Zahlen stützen sich auf die Allgemeine Sterbetafel 1986/88 für die Bundesrepublik Deutschland (Gebietsstand vor dem 3.10.1990). – Der nachfolgende Beitrag schlägt einen kurzgefassten Bogen über die geschichtliche Entwicklung der Sterbetafeln und – auf dieser Basis – der Berechnung von Leibrenten. Eine ausführliche Darstellung mit dem Schwerpunkt „mathematische Herleitung von Sterbetafeln und Leibrenten“ und zahlreichen Quellenhinweisen ist als Sonderheft von Bayern in Zahlen im nächsten Jahr vom selben Autor geplant.

## Sterbetafel: Basis für Leibrenten

Für Bayern wurde im August 2001 eine Sterbetafel für 1996/98 veröffentlicht, die den gleichen Aufbau hat wie die Allgemeine Sterbetafel 1986/88. Anstelle von Volkszählungsergebnissen wurden die Daten aus der Bevölkerungsfortschreibung herangezogen.

Sterbetafel  
als wesentliche  
Entscheidungs-  
grundlage

Es braucht nicht besonders betont zu werden, dass Sterbetafeln oder Überlebentafeln eine wesentliche Entscheidungsgrundlage in Politik und Wirtschaft sind. Sie geben Aufschluss über die Sterblichkeit der Bevölkerung insgesamt und in jeder Altersstufe. Eine Sterbetafel enthält neben den einjährigen Sterbewahrscheinlichkeiten auch die Absterbeordnung (Anzahl der Überlebenden) sowie die mittlere Lebenserwartung in jedem Alter. Außerdem lässt sich mit ihr die wahrscheinliche Lebensdauer berechnen [1]. Es mag auch interessieren, mit welcher Wahrscheinlichkeit das Alter, das durch die mittlere Lebenserwartung in Aussicht gestellt wird, erreicht werden kann. Eine Antwort findet sich durch die Berechnung der betreffenden Überlebenswahrscheinlichkeit.

Eine Sterbetafel kann auch helfen, das durch vorzeitigen Tod (Unfall, Suizid etc.) verursachte Defizit an Lebenszeit zu quantifizieren. Die verlorenen Lebensjahre können mit der ferneren mittleren Lebensdauer oder der mittleren Lebenserwartung geschätzt werden. Zum Beispiel hätte eine bei einem Unfall im Alter von 20 Jahren zu Tode gekommene männliche Person noch eine durchschnittliche Lebenserwartung von 55,4 Lebensjahren gehabt (Bayerische Sterbetafel 1996/98).

Die bayerische Sterbetafel 1996/98 erfüllt zwei wichtige Forderungen: zum einen liegt ihr ein geeigneter Beobachtungszeitraum<sup>1</sup>

zugrunde und zum andern ist die Ausgleichsrechnung zufriedenstellend. A propos Ausgleichung: Vor mehr als einem halben Jahrhundert wünschte man schon, die ganze Sterbetafel vom Alter 0 bis 100 nach derselben Methode ausgleichen zu können (siehe Schweizerische Volkssterbetafeln 1931/41 und 1939/44 S. 78\* [2]). Heutzutage ist uns dies dank der Spline-Funktionen möglich<sup>2</sup>.

Damit war die Möglichkeit einer Berechnung von Kommutationszahlen und Barwerten im Zeitvergleich gegeben. Üblicherweise wurden bisher derartige Berechnungen nur auf Bundesebene vorgenommen. Da an unser Amt immer wieder Anfragen nach solchen Angaben für Leibrentenverträge gerichtet wurden, entschloss man sich für eine probeweise Berechnung der genannten Daten. Die Rechenergebnisse entsprachen den Erwartungen, dass aktuellere Barwerte ihrem Wert nach höher ausfallen müssten. Dies bedeutet, dass neu abzuschließende Kaufgeschäfte mit einer niedrigeren Leibrente auszustatten wären. Nun stellte sich die Frage nach der weiteren Verwertung der gewonnenen Daten: „intra muros“ oder „Eprovette“<sup>3</sup>? Die Tabelle zeigt für die Altersjahre 0 bis 100 die berechneten Daten für den Zinssatz 3%.

Kommutationszahlen und Versicherungsbarwerte wurden schon vor mehr als 200 Jahren berechnet, und zwar genau in der Form wie heute. In Deutschland leistete auf diesem Gebiet Johann Nicolaus Tetens (1736-1807) Pionierarbeit [3]. Er veröffentlichte 1785/86 ein zweibändiges Werk mit dem Titel „Einleitung zur Berechnung

1 Nicht nur bei Indexberechnungen muss ein passendes Basisjahr ausgewählt werden.  
2 Die Nulljährigen sind als Sonderfall nicht in die Glättung einzubeziehen.  
3 Nicht öffentlich oder ein Proberthronen.

der Leibrenten und Anwartschaften, die vom Leben und Tode einer oder mehrerer Personen abhängen". Seinen Berechnungen legte er die Absterbeordnung nach Süßmilch (verbessert von Baumann) zugrunde (siehe Abbildung 1). Bekannter sind wohl seine philosophischen Schriften, die neben denen von Leonhard Euler, den Kritizismus des vor genau 200 Jahren verstorbenen Immanuel Kant beeinflussten.

Über Lorenzo Tonti (um 1630-1695) wurde berichtet, dass er im Jahr 1653 Kardinal Mazarin zur Sanierung der Staatsfinanzen Frankreichs eine Anleihe vorschlug, die später als „Tontine“ bekannt wurde. Dabei handelte es sich um eine Art Leibrente.

Erste Ansätze für die Bewertung von Leibrenten unter Berücksichtigung der Sterblichkeit und des Zinssatzes finden sich bei Johan de Witt (1625-1672). Im Jahr 1671 erschien seine Abhandlung „*Waerdye van Lyf-Renten*". Die gerechte Berechnung der Renten ist nicht erst ein Anliegen unserer Zeit.

#### Ergänzende finanzielle Altersvorsorge

In Deutschland beruht die gesetzliche Rentenversicherung auf dem sogenannten Umlageverfahren; das bedeutet: die erwerbstätige Generation kommt für die Rente der Ruheständler auf („Generationsvertrag“). In seinem in der F.A.Z. vom 1. November 2003 abgedruckten Beitrag „Der dünne Ast der Altersvorsorge“ erwähnt der Autor Thomas Apolte, dass Paul Samuelson 1958 in einem Aufsatz bemerkte, dass die Renten der ersten Rentnergeneration wie „Manna vom Himmel“ fielen. Ende des Zitats. Heute besteht eine Begünstigung für die vorzeitigen Rentenbezieher dadurch, dass die Lebensarbeitszeit außen vor bleibt.

Durch die höhere Lebenserwartung und die geringe Geburtenrate verschiebt sich das Verhältnis zwischen Jung und Alt jedoch zunehmend. Es soll dahingestellt bleiben, welche Probleme sich ergeben würden, wenn die Geburten zwar höher ausfielen, dafür aber für die nachwachsende Generation nur geringe Chancen auf Beschäftigung gegeben wären.

Weiter steigende Lebenserwartung? Manchmal möchte man fast geneigt sein, dass es sich mit den Annahmen über eine weiter ansteigende mittlere Lebenserwartung fast ähnlich verhält wie in Übertreibungsphasen an den Börsen: man glaubt den gerade bestehenden Trend fortschreiben zu können. Es sei an die Situation in den 70er Jahren des vorhergehenden Jahrhunderts erinnert, wo unterschiedliche Auffassungen über die weitere Entwicklung der Lebenserwartung bestanden. Heute kann man fragen, wie sich zum Beispiel die Ernährungsgewohnheiten auf die künftige Lebenserwartung auswirken werden.

Der Umbau der sozialen Sicherungssysteme – wirtschaftlich notwendig und politisch angestrebt – erfordert mehr private Vorsorge vom Einzelnen. Den erfreulichen Aussichten auf ein längeres Leben stehen komplexe Finanzierungsfragen gegenüber. Höhere Lebenserwartung und steigende Gesundheitskosten erfordern im Alter einen nicht unerheblichen Kapitalstock. Den erfreulichen Aussichten auf ein längeres Leben stehen damit komplexe Finanzierungsfragen gegenüber.

Leider gibt es kein Patentrezept für eine passende Altersvorsorge. Am Beginn des neuen Jahrtausends kam es auf internationaler Ebene zu einer heftigen Börsenkorrektur. Dabei spielten mehrere Ereignisse zusammen: Spekulationsblase, Betrugereien Kapital aufnehmender Institutionen und ein unprofessionelles Verhalten der institutionellen Anleger. Dann bewegte sich die Börse zwischen Deflations- und Inflationsangst. Diese Geschehnisse machen die Auswahl geeigneter Vorsorgemaßnahmen für den letzten Lebensabschnitt nicht ganz leicht. Ein Problem bei der Bewertung privater Finanzangelegenheiten sind Rechentechnik und Zinsfaktoren.

In der F.A.Z. vom 13.6.2003 war zu lesen, dass die Deutschen erhebliche Wissenslücken haben, wenn es um Themen wie private Vorsorge oder Geldanlage geht. Dass die Deutschen sich zu wenig um die private Altersvorsorge kümmern, zeigte eine Repräsentativbefragung, die vom Forschungsinstitut NFO Infratest im Auftrag der Commerzbank durchgeführt wurde. In ihrer Ausgabe vom 12. November 2003 versah die F.A.Z. einen Beitrag mit der Überschrift „Um die finanzielle Allgemeinbildung ist es schlecht bestellt“. Im Frühjahr 2004 brachte die Bertelsmann-Stiftung eine Studie heraus mit dem drastischen Titel „*Finanzieller Analphabetismus in Deutschland*“.

Wenn auch die Existenz eines Kapitalmarkts unentbehrlich ist, so ist ihm doch eigen, dass er der sensibelste oder – wenn man will – der volatilste Markt der Welt ist. Krisen an den Finanzmärkten treten immer wieder in der einen oder anderen Form in Erscheinung – Krise und Katharsis sind ein bekanntes Phänomen. Bei der Vorsorge für das Alter sollte noch immer eine alte Regel gelten: Breit streuen wie der Bauer den Mist. Schon der Talmud spricht sich für die Diversifikation aus: ein Drittel in Geschäfte, ein Drittel in Land und ein Drittel in Geld. Heute bevorzugt man die moderne Portfoliotheorie und glaubt, mit etwas Mathematik könne man sich gegen Risiken absichern. Alain Connes bemerkte in seinem Aufsatz „Scheinwerfer auf die Realität“ in der F.A.Z. vom 26. Februar 2000 (Deutsche Bearb. von Jochen Brüning): „... ist es selbst für Fachleute überraschend, dass komplizierte stochastische Differentialgleichungen die Finanzmärkte bewegen ...“

Kein Patentrezept für die Altersvorsorge

Wenig Sorge um private Altersvorsorge in Deutschland

Voltaire (1694–1778) wusste „Es ist leichter, über Geld zu schreiben, als Geld zu machen.“ Er erhielt eine königliche Pension und begründete durch Finanzspekulationen seine Unabhängigkeit. Friedrich dem Großen soll er bei Devisengeschäften zur Seite gestanden haben.

Zu Geldgeschäften äußerte sich *Cicero* (106–43) in seiner Schrift „Vom pflichtgemäßen Handeln“ (De off. II 24,87) folgendermaßen [4]: „Aber über diesen ganzen Bereich, über den Erwerb, die Anlage von Geld – ich wollte auch über seine Verwendung! –, wird vielleicht treffender von manchen hervorragenden Leuten, die beim mittleren Janus-bogen sitzen, als von irgendwelchen Philosophen in irgendeiner Schule eine Erörterung geführt werden.“

Nicht schlecht beraten ist man mit einem Ausspruch von Platon: „Besser sterbend den Gegnern etwas hinterlassen als lebend die Freunde anbetteln“.

#### **Leibrente – eine altersunabhängige Alternative**

Unter „Leibrente“ wird eine Rente verstanden, bei der die Anzahl der Zahlungsleistungen dadurch begrenzt ist, dass die Zahlungen beim Eintritt eines bestimmten Ereignisses (meist Tod des Rentenempfängers) eingestellt werden.

Von der rechtlichen Seite her steht der Begriff Leibrente im Zusammenhang mit verschiedenen Rechtsgebieten, zum Beispiel mit dem Zivilrecht und dem Familienrecht.

Lebenserwartung und Leibrente – eine Alliteration? In bestimmten Fällen können Kaufgeschäfte auf Leibrentenbasis Bestandteil einer Vorsorge für das Alter sein. Ein Immobiliengeschäft auf Rentenbasis kann für den Käufer und Verkäufer gleichermaßen attraktiv sein – eine erstrangige Absicherung (Eintragung im Grundbuch) vorausgesetzt. Die möglichen Auswirkungen der demographischen Entwicklung auf die Immobilienmärkte sollen hier außer Betracht bleiben. Keine Einlassung auch auf den Unterschied zwischen Wert und Preis einer Immobilie.

Immer wieder erreichen unser Amt Anfragen, die sich auf die noch zu erwartende Lebenszeit einer Person eines bestimmten Alters und/oder auf die Höhe einer Leibrente beim Kauf oder Verkauf eines Hauses beziehen. Hierbei greift man auf Bundesergebnisse zurück. Einschlägige Tabellen stehen für diese Zwecke zur Verfügung. Allerdings beruhen die Daten auf der Grundlage der letzten Allgemeinen Sterbetafel 1986/88 und liegen damit mehr als 15 Jahre zurück (siehe „Allgemeine Sterbetafel für die Bundesrepublik Deutschland; Gebietsstand vor dem 3.10.1990“, Fachserie 1, Reihe 1. S.2, S. 32 ff. und S. 52 ff.).

Da das Sterbealter eines Menschen unbekannt ist, muss man sich auf Wahrscheinlichkeiten stützen. Dabei ist eine Überlebenden-Tafel sehr hilfreich. Nach der Wahrscheinlichkeitstheorie ist die Dauer eines menschlichen Lebens ein Zufallsereignis ebenso wie das Ziehen einer Karte aus einem Kartenspiel. Für eine angemessene Bewertung der Leibrenten steht die Zinseszinsrechnung zur Verfügung.

In gewisser Weise haben Leibrentenverträge mit bestimmten Versicherungsverträgen etwas gemeinsam. Ein Anwendungsgebiet der Zinseszinsrechnung sind die verschiedenen Formen der Lebensversicherungen. Bei diesen unterscheidet man u.a. eine Versicherung auf den Todes- und Erlebenfall, eine Invaliden- und Altersversicherung oder Sparratenversicherung. Zwischen den Zahlungen der Versicherungsnehmer und den Leistungen einer Versicherungsanstalt muss Gleichwertigkeit bestehen, soll der Vertrag für keinen der Beteiligten zum Nachteil werden. Selbstverständlich kann dies nur für die Gesamtheit der Versicherungsnehmer gelten, nicht für einen einzelnen.

Für die Einhaltung des Gleichwertigkeitsprinzips bedarf es neben der Zinseszins- und Rentenrechnung u.a. bevölkerungsstatistischer Annahmen.

Zur Ermittlung der Risikoprämie dienen Statistiken. Für eine Lebensversicherung ist eine hervorragende Schadenstatistik eine Volkssterbetafel (allgemeine Sterbetafel wie sie bisher jeweils nach einer Volkszählung erstellt wurde; im Unterschied zu einer versicherten-Sterbetafel). Selbstverständlich benötigt man dazu ein aktuelles Datenmaterial. Wenngleich der Schleier vor der Zukunft nicht gelüftet werden kann, so sollen Lebensversicherer anstreben, die ungewisse Zukunft in kalkulierbare Bahnen zu lenken. Eine Sterbetafel muss auf sicheren Daten beruhen. Sie darf nicht gebraucht werden wie ein Betrunkener eine Straßenlaterne benutzt – mehr zur Unterstützung als zur Erleuchtung (in Anlehnung an Lothar Sachs: Statistische Methoden, 1970.).

Nur für Spielbanken und Lotterien gilt, dass sie für die angebotene Leistung ein vorausbestimmbares Einkommen erzielen. Sie profitieren von der Tatsache, dass über den Ausgang eines Zufallsexperiments, das häufig wiederholt wird, eine fast sichere Vorhersage möglich ist.

Eine Bank mag sich darauf verlassen können, dass es ausreicht, einen gewissen Prozentanteil ihrer Gelder flüssig zu halten. Aufgrund ihrer bisherigen Erfahrungen wird sie annehmen können, dass nicht alle Kunden gleichzeitig ihre Gelder abziehen werden.



Ohne über den Begriff Risiko spintisieren zu wollen, lässt sich nicht abstreiten, dass Risiken im Allgemeinen schwer kalkulierbar sind und die Risikomodelle Schwächen zeigen. Das Vertrauen auf Risikomodelle kann sogar das Finanzsystem destabilisieren. Nach dem Zusammenbruch der Hedge fund LTCM im Jahr 1998 stellte sich die Frage: wie konnte der versammelte Sachverstand von Finanzmathematik und erfahrenen Händlern die Risiken so falsch einschätzen? (F.A.Z. vom 30.09.1998).

Die wirtschaftliche Bedeutung der Versicherer braucht nicht eigens hervorgehoben zu werden. Die Lebensversicherungswirtschaft gilt insbesondere als Kapitalsammelbecken, da sie eine der wichtigsten Formen privater Altersversorgung mit entsprechenden Sparvorgängen darstellt. Die Kapitalmarktentwicklung in den vergangenen Jahren macht es allerdings den Versicherern nicht leicht, die versprochene Verzinsung zu erwirtschaften. Der künftige Wegfall des Steuerprivilegs wird die Lebensversicherer herausfordern.

#### Aktuelle Versicherungsbarwerte wünschenswert

Die steigende Lebenserwartung führt zu einer zeitlich länger anhaltenden Zahlungsverpflichtung. Deshalb müssten wegen der höheren Lebenserwartung neu zu vereinbarende Rentenzahlungen niedriger ausfallen. Die dazu erforderlichen Unterlagen stehen aber leider derzeit und auch nicht in absehbarer Zeit zur Verfügung. Für die Leibrentengeschäfte sind Versicherungsbarwerte nötig. Man gewinnt sie anhand der Absterbeordnung einer Sterbetafel, die der Größe „Überlebende im Alter  $x$ “ entspricht. Die vom Statistischen Bundesamt publizierten sogenannten abgekürzten Sterbetafeln enden mit dem Lebensalter 90 Jahre und sind zudem nicht ausgeglichen; künftig ist allerdings eine Ausdehnung bis zum 100. Altersjahr vorgesehen.

Für Bayern liegt eine Sterbetafel für 1996/98 vor, die den gleichen Aufbau hat wie die Allgemeine Sterbetafel 1986/88 [1]. Damit war die Möglichkeit gegeben, relativ zeitnahe Kommutationszahlen zu berechnen, die sich allerdings nur auf Bayern beziehen. Hierbei kam es vor allem auf den zeitlichen Vergleich an. Derartige Ergebnisse wurden jetzt erstmals für Bayern zusammengestellt.

Kommutation bedeutet nach Duden: Veränderung, Vertauschung. Das lateinische Wort *commutatio* heißt Veränderung, Umschlag, Wechsel. Die Ergebnisse dieser behelfsmäßigen Berechnungen weist die Tabelle aus. Die Übersicht gibt die nötigsten Erläuterungen und ein Beispiel für die Anwendung. Es braucht nicht eigens erwähnt zu werden, dass die dort beschriebene Diskontierung in das Gebiet der Zinseszinsrechnung fällt im Unterschied zur kauf-

männischen Diskontierung, die nur mit einfachen Zinsen rechnet. Die Summa von Pacioli aus dem Jahr 1494 beinhaltet übrigens bereits auch Abschnitte über die kaufmännische Arithmetik, darunter Zins- und Diskontrechnung.

#### Exkurs: Barwert

Dem Begriff Barwert begegnet man in verschiedenen Bereichen (zum Beispiel: kaufmännische Diskontierung, ewige Rente, Rentenrechnung und Sterbetafel).

Im Rahmen der Rentenrechnung versteht man unter Barwert folgendes: Der Barwert gibt an, durch welche Sofortleistung (Zeitwert, Ablösungswert) die gesamten, noch fälligen Zahlungen einer Rente abgelöst werden können.

Die Gewinnung der auf einer Sterbetafel basierenden Versicherungsbarwerte zeigt die Übersicht.

Die nachfolgend beschriebene Diskontierung wird zum Beispiel im Versicherungswesen gebraucht. Bestimmte Ausdrücke gleichen den aus einer Sterbetafel abgeleiteten Versicherungsbarwerten. Die Zinseszinsformel setzt sich bekanntlich aus vier Größen zusammen, von denen jeweils drei gegeben sein müssen:  $b_n = b_0 \cdot q^n$ , Anfangswert  $b_0$ , Endbetrag  $b_n$ , Anzahl der Zinsabschnitte  $n$ , Zinssatz  $p$ , Zinsfaktor  $q = 1 + \frac{p}{100}$ . Die Auflösung nach  $b_0 = \frac{b_n}{q^n} = b_n \cdot \frac{1}{q^n}$  liefert den sogenannten Barwert (diskontierten Wert) einer Summe, das ist jener Betrag, den sie zur Zeit der Berechnung haben müsste, um samt Zinseszinsen nach  $n$  Jahren den Wert  $b_n$  zu erhalten. Statt  $\frac{1}{q^n}$  schreibt man auch  $v = \frac{1}{q^n}$  und nennt  $v$  den Diskontierungsfaktor oder Abzinsungsfaktor.

Damit wird  $b_0 = b_n \cdot \frac{1}{q^n} = b_n \cdot v^n$ . Die Größe  $v^n$  ist der Barwert eines in  $n$  Jahren fälligen Betrages von „1“.

Die kaufmännische Diskontierung rechnet dagegen nur mit einfachen Zinsen. Mit Barwert kann auch Ertragswert gemeint sein; das ist die Umrechnung (Diskontierung) laufender Erträge auf den gegenwärtigen Kapitalwert (Ertragswert).

#### Derzeit vereinbarte Leibrenten zu hoch

Es zeigte sich in der Tat, dass die anhand der bayerischen Sterbetafel 1996/98 berechneten Barwerte höher ausfallen als jene, die auf der Sterbetafel 1986/88 basieren. Dies bedeutet, dass neu abzuschließende Verträge niedrigere Leibrentenbeträge beinhalten müssten. Nur beim weiblichen Geschlecht fiel auf, dass ab dem Altersjahr 95 die Barwerte für 1996/98 geringfügig unter denen für 1986/88 liegen.

**Kommunikationszahlen und Versicherungsbarwerte einer lebenslänglich vorschüssig zahlbaren Rente nach den bayerischen Sterbetafeln 1986/88 und 1996/98 – Zinssatz 3% –**

1986/88										1996/98									
Männliche Personen					Weibliche Personen					Männliche Personen					Weibliche Personen				
$x^{(1)}$	$l_x^{(2)}$	$D_x^{(3)}$	$N_x^{(4)}$	$\ddot{a}_x^{(5)}$	$l_x^{(2)}$	$D_x^{(3)}$	$N_x^{(4)}$	$\ddot{a}_x^{(5)}$		$x^{(1)}$	$l_x^{(2)}$	$D_x^{(3)}$	$N_x^{(4)}$	$\ddot{a}_x^{(5)}$	$l_x^{(2)}$	$D_x^{(3)}$	$N_x^{(4)}$	$\ddot{a}_x^{(5)}$	
0	100000	100000	2969429	29,69	100000	100000	3057228	30,57		0	100000	100000	3008146	30,08	100000	100000	3083159	30,83	
1	99170	96282	2869429	29,80	99354	96460	2957228	30,66		1	99525	96626	2908146	30,10	99602	96701	2983159	30,85	
2	99099	93410	2773147	29,69	99296	93596	2860768	30,57		2	99489	93778	2811520	29,98	99570	93854	2886458	30,75	
3	99050	90645	2679737	29,56	99264	90841	2767172	30,46		3	99464	91024	2717742	29,86	99547	91100	2792604	30,65	
4	99009	87968	2589092	29,43	99238	88172	2676331	30,35		4	99446	88356	2626718	29,73	99530	88431	2701504	30,55	
5	98974	85376	2501124	29,30	99218	85586	2588159	30,24		5	99430	85769	2538362	29,60	99518	85845	2613073	30,44	
6	98944	82864	2415748	29,15	99200	83078	2502573	30,12		6	99415	83259	2452592	29,46	99508	83336	2527228	30,33	
7	98918	80429	2332884	29,01	99184	80646	2419495	30,00		7	99400	80821	2369334	29,32	99498	80901	2443892	30,21	
8	98894	78068	2252455	28,85	99171	78287	2338849	29,88		8	99386	78456	2288513	29,17	99489	78538	2362991	30,09	
9	98870	75776	2174387	28,70	99159	75997	2260562	29,75		9	99374	76162	2210056	29,02	99480	76243	2284453	29,96	
10	98848	73552	2098611	28,53	99149	73776	2184565	29,61		10	99362	73935	2133894	28,86	99472	74017	2208210	29,83	
11	98828	71395	2025059	28,36	99138	71619	2110789	29,47		11	99351	71773	2059960	28,70	99463	71854	2134194	29,70	
12	98809	69303	1953664	28,19	99126	69525	2039170	29,33		12	99338	69674	1988186	28,54	99453	69754	2062339	29,57	
13	98789	67271	1884361	28,01	99112	67490	1969645	29,18		13	99322	67633	1918513	28,37	99441	67714	1992585	29,43	
14	98766	65296	1817091	27,83	99096	65514	1902154	29,03		14	99303	65651	1850879	28,19	99427	65733	1924871	29,28	
15	98734	63374	1751795	27,64	99077	63594	1836640	28,88		15	99278	63723	1785228	28,02	99410	63808	1859138	29,14	
16	98685	61497	1688421	27,46	99053	61727	1773046	28,72		16	99242	61844	1721506	27,84	99389	61936	1795330	28,99	
17	98610	59661	1626924	27,27	99024	59911	1711320	28,56		17	99187	60010	1659661	27,66	99364	60117	1733394	28,83	
18	98509	57864	1567263	27,09	98989	58146	1651409	28,40		18	99110	58217	1599652	27,48	99334	58348	1673277	28,68	
19	98388	56109	1509399	26,90	98950	56430	1593263	28,23		19	99011	56465	1541435	27,30	99300	56629	1614929	28,52	
20	98258	54403	1453290	26,71	98910	54764	1536833	28,06		20	98899	54758	1484970	27,12	99263	54960	1558300	28,35	
21	98129	52749	1398887	26,52	98869	53147	1482069	27,89		21	98783	53101	1430212	26,93	99226	53339	1503340	28,18	
22	98005	51148	1346138	26,32	98828	51578	1428922	27,70		22	98672	51496	1377112	26,74	99190	51767	1450001	28,01	
23	97886	49598	1294990	26,11	98789	50056	1377345	27,52		23	98570	49945	1325615	26,54	99155	50241	1398235	27,83	
24	97771	48097	1245392	25,89	98751	48579	1327289	27,32		24	98477	48444	1275671	26,33	99121	48761	1347994	27,64	
25	97661	46643	1197295	25,67	98713	47146	1278710	27,12		25	98390	46992	1227227	26,12	99087	47325	1299233	27,45	
26	97555	45236	1150651	25,44	98676	45756	1231564	26,92		26	98305	45584	1180235	25,89	99053	45930	1251908	27,26	
27	97452	43872	1105416	25,20	98639	44406	1185809	26,70		27	98219	44217	1134651	25,66	99019	44577	1205978	27,05	
28	97351	42550	1061544	24,95	98601	43096	1141403	26,48		28	98133	42892	1090434	25,42	98984	43264	1161401	26,84	
29	97250	41268	1018994	24,69	98560	41824	1098306	26,26		29	98047	41606	1047543	25,18	98949	41989	1118137	26,63	
30	97147	40023	977726	24,43	98516	40587	1056483	26,03		30	97960	40358	1005937	24,93	98914	40751	1076149	26,41	
31	97039	38814	937703	24,16	98469	39386	1015895	25,79		31	97871	39147	965579	24,67	98878	39550	1035397	26,18	
32	96924	37639	898889	23,88	98418	38219	976509	25,55		32	97779	37971	926431	24,40	98839	38383	995847	25,95	
33	96802	36497	861250	23,60	98363	37085	938290	25,30		33	97685	36830	888460	24,12	98796	37249	957464	25,70	
34	96675	35387	824753	23,31	98305	35964	901204	25,04		34	97585	35720	851630	23,84	98749	36147	920216	25,46	
35	96542	34309	789365	23,01	98243	34914	865220	24,78		35	97476	34641	815910	23,55	98696	35075	884069	25,21	
36	96399	33261	755056	22,70	98174	33873	830306	24,51		36	97356	33591	781269	23,26	98636	34033	848994	24,95	
37	96246	32241	721795	22,39	98096	32860	796433	24,24		37	97226	32569	747678	22,96	98570	33019	814962	24,68	
38	96079	31247	689554	22,07	98010	31875	763573	23,95		38	97083	31574	715109	22,65	98497	32034	781942	24,41	
39	95895	30279	658307	21,74	97914	30917	731697	23,67		39	96928	30605	683535	22,33	98416	31075	749909	24,13	
40	95694	29336	628028	21,41	97809	29984	700781	23,37		40	96756	29661	652929	22,01	98326	30143	718833	23,85	
41	95476	28416	598692	21,07	97693	29076	670797	23,07		41	96565	28740	623268	21,69	98227	29235	688691	23,56	
42	95240	27520	570276	20,72	97565	28192	641720	22,76		42	96353	27842	594528	21,35	98117	28352	659456	23,26	
43	94983	26647	542755	20,37	97424	27332	613528	22,45		43	96119	26966	566686	21,02	97995	27492	631104	22,96	
44	94702	25794	516108	20,01	97269	26493	586196	22,13		44	95862	26110	539720	20,67	97861	26655	603612	22,65	
45	94392	24961	490314	19,64	97101	25677	559703	21,80		45	95583	25276	513610	20,32	97712	25839	576958	22,33	
46	94052	24147	465353	19,27	96918	24882	534026	21,46		46	95280	24462	488334	19,96	97548	25044	551119	22,01	
47	93680	23351	441207	18,89	96721	24109	509143	21,12		47	94951	23667	463872	19,60	97368	24270	526075	21,68	
48	93272	22572	417856	18,51	96508	23355	485035	20,77		48	94596	22892	440205	19,23	97170	23515	501805	21,34	
49	92824	21809	395285	18,12	96277	22620	461680	20,41		49	94209	22134	417313	18,85	96953	22779	478290	21,00	

**Kommuntationszahlen und Versicherungsbarwerte einer lebenslänglich vorschüssig zahlbaren Rente nach den bayerischen Sterbetafeln 1986/88 und 1996/98 – Zinssatz 3% –**

1986/88										1996/98									
Männliche Personen					Weibliche Personen					Männliche Personen					Weibliche Personen				
$x^1)$	$l_x^{(2)}$	$D_x^{(3)}$	$N_x^{(4)}$	$\ddot{a}_x^{(5)}$	$l_x^{(2)}$	$D_x^{(3)}$	$N_x^{(4)}$	$\ddot{a}_x^{(5)}$		$x^1)$	$l_x^{(2)}$	$D_x^{(3)}$	$N_x^{(4)}$	$\ddot{a}_x^{(5)}$	$l_x^{(2)}$	$D_x^{(3)}$	$N_x^{(4)}$	$\ddot{a}_x^{(5)}$	
50	92331	21061	373476	17,73	96028	21905	439060	20,04		50	93786	21393	395178	18,47	96717	22062	455511	20,65	
51	91786	20327	352414	17,34	95759	21207	417155	19,67		51	93322	20667	373785	18,09	96461	21363	433449	20,29	
52	91186	19606	332087	16,94	95468	20527	395948	19,29		52	92813	19956	353118	17,69	96183	20681	412086	19,93	
53	90526	18897	312481	16,54	95152	19863	375421	18,90		53	92257	19259	333162	17,30	95883	20016	391406	19,56	
54	89802	18200	293583	16,13	94808	19215	355558	18,50		54	91652	18575	313903	16,90	95561	19367	371390	19,18	
55	89010	17514	275383	15,72	94433	18581	336343	18,10		55	90995	17905	295328	16,49	95216	18735	352023	18,79	
56	88145	16839	257869	15,31	94022	17962	317762	17,69		56	90283	17247	277423	16,09	94847	18119	333287	18,39	
57	87204	16174	241030	14,90	93574	17355	299801	17,27		57	89510	16602	260176	15,67	94451	17518	315168	17,99	
58	86183	15519	224856	14,49	93085	16762	282445	16,85		58	88671	15967	243574	15,25	94027	16931	297650	17,58	
59	85079	14874	209337	14,07	92551	16180	265683	16,42		59	87759	15342	227607	14,84	93571	16359	280719	17,16	
60	83890	14239	194463	13,66	91967	15610	249503	15,98		60	86766	14727	212265	14,41	93080	15799	264360	16,73	
61	82612	13614	180224	13,24	91328	15050	233893	15,54		61	85683	14120	197538	13,99	92549	15251	248561	16,30	
62	81242	12998	166611	12,82	90628	14500	218843	15,09		62	84501	13519	183418	13,57	91972	14715	233310	15,86	
63	79775	12391	153613	12,40	89862	13968	204344	14,64		63	83214	12926	169899	13,14	91345	14189	218596	15,41	
64	78203	11793	141222	11,97	89024	13425	190386	14,18		64	81815	12338	156973	12,72	90661	13672	204407	14,95	
65	76519	11203	129428	11,55	88108	12900	176960	13,72		65	80300	11757	144635	12,30	89913	13164	190735	14,49	
66	74715	10621	118225	11,13	87107	12382	164060	13,25		66	78664	11182	132878	11,88	89094	12665	177570	14,02	
67	72785	10045	107604	10,71	86013	11871	151678	12,78		67	76906	10614	121696	11,47	88195	12172	164906	13,55	
68	70722	9476	97559	10,30	84816	11364	139807	12,30		68	75023	10052	111082	11,05	87206	11685	152734	13,07	
69	68520	8914	88083	9,88	83504	10863	128443	11,82		69	73013	9496	101030	10,64	86115	11202	141050	12,59	
70	66173	8357	79170	9,47	82061	10364	117580	11,34		70	70875	8951	91532	10,23	84910	10724	129847	12,11	
71	63676	7808	70812	9,07	80469	9867	107216	10,87		71	68606	8412	82581	9,82	83576	10248	119123	11,62	
72	61025	7265	63004	8,67	78708	9370	97349	10,39		72	66202	7881	74168	9,41	82098	9774	108875	11,14	
73	58220	6729	55739	8,28	76759	8872	87979	9,92		73	63660	7358	66287	9,01	80458	9299	99102	10,66	
74	55264	6201	49010	7,90	74603	8371	79107	9,45		74	60977	6842	58929	8,61	78638	8824	89802	10,18	
75	52165	5683	42809	7,53	72221	7868	70736	8,99		75	58153	6335	52087	8,22	76621	8347	80978	9,70	
76	48936	5176	37126	7,17	69598	7362	62868	8,54		76	55190	5838	45751	7,84	74388	7868	72631	9,23	
77	45594	4682	31950	6,82	66723	6852	55506	8,10		77	52093	5350	39914	7,46	71924	7386	64763	8,77	
78	42161	4203	27268	6,49	63591	6340	48654	7,67		78	48869	4872	34564	7,09	69213	6901	57377	8,31	
79	38665	3743	23064	6,16	60204	5828	42314	7,26		79	45532	4407	29692	6,74	66246	6412	50476	7,87	
80	35139	3302	19322	5,85	56572	5316	36487	6,86		80	42100	3956	25285	6,39	63017	5922	44064	7,44	
81	31620	2885	16019	5,55	52716	4810	31170	6,48		81	38597	3522	21328	6,06	59528	5431	38141	7,02	
82	28149	2494	13134	5,27	48667	4311	26361	6,11		82	35053	3105	17807	5,73	55788	4942	32710	6,62	
83	24768	2130	10641	5,00	44467	3824	22050	5,77		83	31504	2709	14702	5,43	51819	4457	27768	6,23	
84	21519	1797	8511	4,74	40168	3354	18225	5,43		84	27990	2337	11992	5,13	47651	3979	23312	5,86	
85	18443	1495	6714	4,49	35831	2905	14871	5,12		85	24556	1991	9655	4,85	43328	3512	19333	5,50	
86	15575	1226	5219	4,26	31525	2481	11967	4,82		86	21248	1672	7664	4,58	38905	3062	15821	5,17	
87	12946	989	3993	4,04	27322	2088	9486	4,54		87	18110	1384	5992	4,33	34448	2632	12759	4,85	
88	10578	785	3004	3,83	23294	1728	7398	4,28		88	15184	1126	4608	4,09	30032	2228	10126	4,55	
89	8486	611	2219	3,63	19509	1405	5670	4,03		89	12506	901	3482	3,87	25736	1854	7898	4,26	
90	6675	467	1608	3,44	16027	1121	4265	3,81		90	10103	706	2581	3,65	21641	1513	6045	3,99	
91	5140	349	1141	3,27	12896	876	3144	3,59		91	7994	543	1875	3,45	17822	1210	4531	3,75	
92	3870	255	792	3,11	10147	669	2268	3,39		92	6185	408	1332	3,27	14346	946	3321	3,51	
93	2844	182	537	2,95	7796	499	1599	3,21		93	4672	299	924	3,09	11263	721	2376	3,30	
94	2037	127	355	2,80	5838	363	1101	3,03		94	3439	214	625	2,93	8606	535	1655	3,10	
95	1419	86	228	2,67	4255	257	738	2,87		95	2462	149	412	2,77	6385	385	1120	2,91	
96	960	56	143	2,54	3013	176	481	2,73		96	1710	100	263	2,63	4588	269	735	2,74	
97	629	36	87	2,42	2069	118	305	2,59		97	1150	65	163	2,49	3186	181	467	2,58	
98	399	22	51	2,31	1376	76	187	2,46		98	747	41	98	2,37	2131	118	285	2,43	
99	244	13	29	2,20	885	47	111	2,34		99	468	25	56	2,25	1369	73	168	2,29	
100	144	7	16	2,10	549	29	64	2,23		100	281	15	31	2,14	841	44	94	2,16	

1 Vollendetes Alter  $x$ .2 Überlebende im Alter  $x$ .3 Diskontierte Zahl der Lebenden des Alters  $x$ .

4 Summe der diskontierten Zahlen der Lebenden.

5  $\ddot{a}_x = D_x / N_x$  Barwert der sofort beginnenden und lebenslänglich, jährlich vorschüssig zahlbaren Leibrente „1“ für eine  $x$ -jährige Person (lebenslängliche Leibrente).



### Kommutationszahlen und Versicherungsbarwerte

Grundlage für die Berechnung von Versicherungsbarwerten ist die Spalte „Überlebende im Alter  $x$ “ ( $l_x$ ) einer Sterbetafel. Mit diesen Daten werden für einen bestimmten Zinssatz (hier 3%) sogenannte Kommutationszahlen ( $D_x$  und  $N_x$ ) errechnet. Diese dienen zur Berechnung des Barwerts  $\ddot{a}_x = \frac{N_x}{D_x}$ . Hier wurde nur der Barwert einer sofort beginnenden und lebenslänglich, jährlich vorschüssig zahlbaren Leibrente „1“ für eine  $x$ -jährige Person (lebenslängliche Leibrente) betrachtet. Man nennt  $D_x$  die diskontierte Zahl der Lebenden des Alters  $x$ . Es ist  $D_x = l_x \cdot v^x$ ,  $N_x = \sum D_x = D_x + D_{x+1} + D_{x+2} + \dots + D_{\omega}$  und  $v = \frac{1}{1+i}$  der Diskontierungsfaktor zum Zinssatz (Zinsfuß)  $i = \frac{p}{100}$ .

Mit  $x$  wird das vollendete Alter bezeichnet. Der Abzinsungsfaktor  $v^x$  berechnet sich aus  $\frac{1}{(1+i)^x}$ .

$\omega$  bedeutet das höchste in der Sterbetafel von den Überlebenden erreichbare Alter ( $l_{\omega} > 0, l_{\omega+1} = 0$ ), für 1986/88 Männer 107 und Frauen 109 und für 1996/98 Männer 108 und Frauen 109.

Ein Rechenbeispiel soll die Verwendung des Versicherungsbarwerts bei einem Kaufgeschäft auf der Basis einer Leibrente veranschaulichen: Eine 75-jährige Frau will ihr Haus für 250 000 Euro verkaufen. Dafür möchte sie eine lebenslänglich, jährlich vorschüssig zahlbare Leibrente erhalten. Gefragt wird nach dem Betrag der Rente bei einer Verzinsung des Kaufpreises von 3%. Der hier interessierende Barwert auf der Basis der Sterbetafel 1996/98 beträgt 9,70. Der Rentenbetrag oder Wert der Leibrente ist der Quotient aus Kaufpreis (250 000 Euro) und Barwert (9,70), also 25 773,20 Euro. Zum Vergleich der auf der Grundlage der bayerischen Sterbetafel 1986/88 berechnete Wert einer Leibrente: Diese beläuft sich auf 27 808,68 Euro (250 000 / 8,99).

Kommutationszahlen und Versicherungsbarwerte können auch für die Toten (Spalte  $d_x$  einer Sterbetafel) berechnet werden.

$C_x$  stünde dann für die diskontierte Zahl der Toten und  $M_x$  für  $\sum C_x$ . Diese können für die Prämienberechnung aller Arten von Todesfallversicherungen herangezogen werden. Eine Kombination der Größen  $M_x$  und  $N_x$  ermöglicht die Festsetzung von Prämien für Lebensversicherungen.

### Veröffentlichung der probeweise ermittelten Barwerte

Nun stellte sich die Frage, ob die berechneten Versicherungsbarwerte veröffentlicht werden sollen. Selbst wenn die Daten nur von akademischem Wert sein sollten, so spricht doch einiges für ihre Publikation, ohne in einen Bereich einzutreten, der einstmals der Pythia (Priesterin des Orakels zu Delphi) oder der Sibylle (im Altertum Name für weissagende Frauen) vorbehalten war.

Da für Bayern relativ zeitnahe Sterbetafeln zur Verfügung stehen und mit der vorangegangenen methodisch vergleichbar sind, wurde die Gelegenheit genutzt, aktuelle Versicherungsbarwerte zu gewinnen. Bayern weist als flächenmäßig größtes Land der Bundesrepublik rund 12 Millionen Einwohner aus.

Die Tabelle enthält die berechneten Barwerte für 1996/98 und zum Vergleich die für 1986/88 aus, wobei den Daten jeweils ein Zinssatz von 3% zugrunde gelegt wurde. Cui bono?

Für die Lebensversicherer besteht wegen der Längerlebigkeit der Bevölkerung und der Kapitalmarktentwicklung (sinkende Zinsen) ein Handlungsbedarf.

Es ist noch nicht lange her, dass das Bundesfinanzministerium der Versicherungswirtschaft anheim stellte, „... neue Produkte auf Basis der Leibrenten auf den Markt zu bringen“ (siehe SZ von 21. Oktober 2003: Das Ende der „hässlichen Braut“). Was bedeutet diese Anregung? Der berühmte Mathematiker Leonhard Euler (1707–1783) brachte schon zum Ausdruck, dass die notwendigen Rechnungsgrundlagen für Leibrenten die Sterbetafel und der Zinsfuß sind. Euler betrachtete Personen, die sich eine Leibrente verschaffen als besonders lebenskräftig. Auch heute dürfte die Lebenserwartung der Personen, die Rentenversicherungen abschließen, im Durchschnitt höher sein als die der Gesamtbevölkerung.

An dieser Stelle sei auch daran erinnert, dass Anlage 9 zu § 14 Be-

wertungsgesetz den Kapitalwert einer lebenslangen Nutzung oder Leistung für die Altersjahre 0 bis 110 für beide Geschlechter ausweist; berechnet nach der Sterbetafel für die Bundesrepublik Deutschland 1986/88. Erstaunen mag der Zusatz „Gebietsstand seit dem 3. Oktober 1990“ (sic!).

### Sterbetafeln als Entscheidungsgrundlage

Für Amartya Sen (geb. 1933), „Nobelpreisträger“<sup>4</sup> für Wirtschaftswissenschaften 1998, erweisen sich Sterblichkeitsdaten als wichtige Ergänzung der ökonomischen Analyse (siehe seinen Beitrag „Lebensstandard und Lebenserwartung“ in der Schrift „Spektrum der Wissenschaft“, November 1993). Im Vorspann zu dem genannten Beitrag heißt es: „Herkömmliche Kriterien wie Bruttoinlandsprodukt und Zahlungsbilanz sagen oft zu wenig über die tatsächliche Leistungsfähigkeit einer Volkswirtschaft aus. Als wichtige Ergänzung der ökonomischen Analyse erweisen sich Sterblichkeitsdaten.“

Die Bedeutung von Sterbetafeln unterstrich schon der große Mathematiker und Astronom Carl Friedrich Gauß (1777-1855), der auch einmal ersucht wurde, die „Universitätswitwencasse“ neu zu organisieren. In seiner Schrift „Gauß zum Gedächtnis“ führt W. Sartorius von Waltershausen zu diesem Thema folgendes aus: „Besonderen Werth legte er auf Mortalitätstafeln und auf die Erforschung der Gesetze, nach denen sich das menschliche Leben abspinnt, theils vom rein wissenschaftlichen Standpunkte aus, theils in Rücksicht auf eine weitere Anwendung bei der Berechnung von Lebensversicherungen, Tontinen, Wittwencassen u.s.w.“ Gauß interessierte sich besonders für die beiden äußersten Grenzen des menschlichen Lebens.

„est senatori necessarium nosse rem publicam – idque latet patet ...“ (dass ein Senator mit Staat und Politik vertraut sein muss) und das ist ein weites Feld: ...) schrieb der römische Staatsmann und berühmte Redner Marcus Tullius Cicero (106-43 v. Chr.) in seiner Schrift *De Legibus* III 41 (Über die Gesetze).

Kurfürst Max IV. Josef von Pfalz-Bayern (reg. 1799-1806), der spätere bayerische König Maximilian I. Joseph (reg. 1806-1825), ließ bald nach seinem Regierungsantritt den Auftrag erteilen (1799), Vorschläge zur Begründung einer Witwen- und Waisen-Versorgungsanstalt auszuarbeiten. Ein solches Projekt lässt sich nur mit einer Sterbetafel bewerkstelligen. Damit war der Anstoß für die Erstellung einer ersten bayerischen Mortalitäts-Tafel (Sterbetafel) gegeben. Dieses Vorhaben fiel aber in eine schwierige Zeit (verarmter Staat und die Schicksalsfrage: mit Habsburg oder Frankreich?). Es dauerte daher ein Vierteljahrhundert bis dieses Projekt vollendet

war (um 1826), das außerhalb einder amtlichen Statistik abgewickelt wurde [5].

Nebenbei sei bemerkt, dass ein erster Vorläufer der amtlichen Statistik in der 1801 geschaffenen Einrichtung „Statistisch-topographisches Bureau“ gesehen werden kann [6]. Nach Meyers Konversations-Lexikon 1897: „Die erste Organisation der amtlichen Statistik erfolgte 1756 in Schweden, wo eine „Tabellenkommission“ jährlich Nachweisungen über die Bewegung der Bevölkerung lieferte. Ferner wurden eigne mit der Ansammlung, Ordnung und Veröffentlichung des statistischen Materials betraute Stellen (statistische Bureaus) errichtet in: Frankreich (1796 vorübergehend, dann 1800), Bayern (1801, Hermann, Mayr), Italien (1803, Bodio), Preußen (1805 von Stein gegründet [Frh. v.u.z. Stein], Krug, J.G. Hoffmann, Dieterici, Engel, Blenck), Österreich (1810, Czörnig, Fickler), ...“

### Mittlere Lebenserwartung: Überlebenswahrscheinlichkeit

Heute ist die Kenntnis der mittleren künftigen Lebenserwartung in jedem Alter und die ihr nahestehende wahrscheinliche Lebensdauer von besonderem Interesse. Mit gehaltvoller Kürze beschreiben beide Begriffe eine Reihe von Tatsachen. Eine Definition dieser Ausdrücke findet sich im bereits genannten Beitrag „Bayerische Sterbetafel 1996/98“ [1] auf den Seiten 296 und 297.

Für einen neugeborenen Knaben beträgt die Wahrscheinlichkeit, das durch die mittlere Lebenserwartung angegebene Alter von 74,7 Jahren zu erreichen, rund 60%. Mit zunehmendem Alter nimmt die Überlebenswahrscheinlichkeit ständig ab, wenn auch nur allmählich. Die Aussicht eines 66 Jahre alten Mannes, das Alter von 80,8 Jahren (bei einer mittleren Lebenserwartung von 14,8 Jahren) zu erlangen, beläuft sich noch auf über 50%. Eine 73-jährige Frau kann noch mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 50% damit rechnen, weitere 12,7 Jahre zu leben. Dann sinkt die Überlebenswahrscheinlichkeit unter 50%. Das heißt: Die Wahrscheinlichkeit, das Alter, das aufgrund der mittleren Lebenserwartung zu erreichen in Aussicht gestellt wird, zu erleben ist danach bereits geringer, es zu erleben, als die Wahrscheinlichkeit, vorher zu sterben.

### Vorläufer von Altersabsicherungen

Mit dem Thema Alter und den damit verbundenen Fragen mussten sich die Menschen schon immer auseinandersetzen. In einem in der F.A.Z. vom 6. Juli 1996 veröffentlichten Aufsatz „Das Reich auf feste Füße stellen“ verwies der Autor Hans-Peter Schneider auf die

<sup>4</sup> Dieser Preis wird nicht von Alfred Nobels Stiftung getragen, sondern von der schwedischen Reichsbank.



zahlreichen Denkschriften von Leibniz (1646–1716) zur Verbesserung der Krankheits- und Altersvorsorge, zur Errichtung von Renten- und Pensionskassen und zur Schaffung von Systemen der Lebensversicherung. Der Verfasser folgert: „So wird man in Leibniz nicht zuletzt auch einen Vorläufer moderner Sozialstaatlichkeit erblicken können“.

„Zwei wichtige sozialpolitische Probleme sind heute die Verschuldung der Staaten und die gerechte Berechnung der Renten. Dies sind genau die Probleme, die Leibniz ausführlich zwischen 1680 und 1683 diskutiert.“ So heißt es treffend bei Eberhard Knobloch in seinem Beitrag „Die Schriften im Überblick“ für das von ihm u. a. im Jahr 2000 herausgegebene Werk „Hauptschriften zur Versicherungs- und Finanzmathematik“ von Gottfried Wilhelm Leibniz [7].

#### **Erste Anfänge von Unterstützungskassen (Hinterbliebenenversorgung)**

Zur Zeit des römischen Kaisers Augustus wurde eine Veteranenversorgung (*aerarium militare*) eingerichtet. Auch bestand in jeder Legion eine Begräbniskasse [8].

Als eine der ältesten konfessionsungebundenen sozialen Einrichtungen der Welt gilt heute die 1545 in Bremen gegründete Stiftung „Haus Seefahrt“. Sie unterstützt seither neben Witwen und Waisen von bremischen Seeleuten auch jene, die selbst in Seenot, Gefangenschaft oder sonstige widrige Umstände geraten sind. Als Deutschlands älteste Sozialsiedlung gilt die von Jakob Fugger 1521 ins Leben gerufene Stiftung. Sogenannte Waisen- und Witwenkassen wurden erst im 18. Jahrhundert errichtet.

#### **Demographische Entwicklung war absehbar**

Allmählich scheint das Problem der demographischen Entwicklung der Öffentlichkeit bewusst zu werden, wie die seit einiger Zeit öffentlich ausgetragenen Diskussionen zeigen. Bestimmte Institutionen standen dieser Entwicklung jedoch schon lange aufgeschlossen gegenüber. Einige ausgewählte sollen hier genannt werden:

Das ifo-Institut München veranstaltete zum Beispiel schon 1978 eine Tagung „Wechselwirkungen zwischen Wirtschafts- und Bevölkerungsentwicklung“.

Die erste UN-Konferenz über das Altern fand vor mehr als zwanzig Jahren (1982) statt.

Im Jahr 1983 gab Günter Schmolders ein Buch mit dem Titel „Der Wohlfahrtsstaat am Ende“ heraus. Scharfzüngig lautet es darin: „Adam Riese schlägt zurück“.

In einem gesellschaftspolitischen Beitrag der Deutschen Bank aus dem Jahr 1983 mit dem Titel „Der Staat – das sind wir selbst“ hieß es: „Die politische Legitimation, die jedes demokratische Herrschafts- und Sozialsystem braucht, um Regieren zu ermöglichen, war leicht erreichbar, solange der Konsens der Bürger sich unkritisch bloß auf mehr Wohlstand und mehr öffentliche Leistung bezog.“

In jüngerer Zeit fehlt es nicht an mahnenden Worten in Bezug auf den demographischen Wandel. So wurde zum Beispiel vor kurzem in der F.A.Z vom 23. März 2004 ein Aufsatz von Paul S. Hewitt mit der Überschrift „Die Geopolitik des globalen Alterungsprozesses“ veröffentlicht. Unter anderem heißt es dort: „Der globale Alterungsprozess wird unsere Welt grundlegend verändern. Keine Region, kein Individuum wird den weitreichenden Auswirkungen auf Wirtschaft, Finanzsysteme, Regierungsbudgets und sogar Militärapparate entgehen.“

Manche meinen, dass die heutige Gesellschaft erst beginnt, sich auf die Längerlebigkeit der modernen Menschen einzustellen.

#### **Verfahren der Barwertberechnung nach Tetens**

Kommutationszahlen und Versicherungsbarwerte wurden schon vor mehr als 200 Jahren berechnet, und zwar genau in der Form wie heute. In Deutschland leistete auf diesem Gebiet Johann Nicolaus Tetens (1736–1807) Pionierarbeit [3]. Er veröffentlichte 1785 und 1786 ein zweibändiges Werk mit dem Titel „Einleitung zur Berechnung der Leibrenten und Anwartschaften, die vom Leben und Tode einer oder mehrerer Personen abhängen“. Seinen Berechnungen legte er die Absterbeordnung nach Süßmilch (verbessert von Baumann) zugrunde (siehe Abbildung 1).

Die Spalte B der Tabelle von Tetens entspricht der „Anzahl der Überlebenden“ (Absterbeordnung)  $l_x$  einer Sterbetafel oder Überlebendertafel (engl. Life table). In dem Werk von Tetens heißt es im Kapitel II Abschnitt 1 unter Punkt 56: „Praktische Methode, die mittlere Lebensdauer und die Leibrenten nach jeder gegebenen Sterblichkeitstafel zu berechnen.“ Letztere Aussage hat heute noch Gültigkeit. Die Spalten D und E der Tetens-Tabelle werden in einer heutigen Kommutationstafel mit den Symbolen  $D_x$  und  $N_x$  gekennzeichnet (siehe Übersicht).

Zur Berechnung des Barwerts führt Tetens unter Punkt 58 folgendes aus: „Um den Wehrt der Leibrente 1 zu haben, nämlich auf ganze Jahre, wobey die Zwischenzeiten nicht gerechnet werden, und auch die Rente jedesmal am Ende des Jahrs zahlbar ist, wie im 8ten Satz § 40. dividire man die Zahl aus der Columne E, welche bey dem um 1 Jahr größern Alter steht, durch die Zahl aus der Columne C,

Abb. 1

Von unveränderlichen Leibrenten. 89

A. Alter.	B. Lebens nach Sußmilch.	C. Die Zahlen in B. discoun- tirt auf die Zahre des Alters, für $r=1,04$ .	D. Summen der Zahlen in B. von hinten an addirt.	E. Summen der Zahlen in C. von hinten an addirt.
0	1000	1000	28988	12431, 48
1	750	721, 15	27988	11431, 48
2	661	611, 13	27238	10710, 33
3	618	549, 40	26577	10099, 20
4	593	500, 90	25959	9549, 80
5	579	475, 90	25366	9042, 90
6	567	448, 11	24787	8567, 00
7	556	422, 51	24220	8118, 89
8	547	399, 69	23664	7690, 38
9	539	378, 69	23117	7296, 69
10	532	359, 40	22578	6918, 00
11	527	342, 33	22046	6558, 60
12	523	326, 66	21519	6216, 27
13	519	311, 70	20996	5889, 61
14	515	297, 40	20477	5577, 91
15	511	283, 74	19962	5280, 51
16	507	270, 69	19451	4996, 77
17	503	258, 23	18944	4726, 08
18	499	246, 32	18441	4467, 85
19	495	234, 95	17942	4221, 53
20	491	224, 09	17447	3986, 58
21	486	213, 27	16956	3762, 49
22	481	202, 96	16470	3549, 22
23	476	193, 13	15989	3346, 26
24	471	183, 75	15513	3153, 13
25	466	174, 80	15042	2969, 38
26	461	166, 28	14576	2794, 58
27	456	158, 15	14115	2628, 30
28	451	150, 40	13659	2470, 15
29	445	142, 69	13208	2319, 75
30	439	135, 35	12763	2177, 06

F 5 A.

Ausschnitt aus dem Werk von Johann Nicolaus Tetens „Einleitung zur Berechnung der Leibrenten und Anwartschaften, die vom Leben und Tode einer oder mehrerer Personen abhängen.“ Bd. 1 Leipzig 1785. [Der Spalte C liegt ein Zinssatz von 4% zugrunde.]

bey dem gegebenen Alter selbst.“ „Ex. Es sey das gegebene Alter 20 Jahr, so stehet in der Columnne E bey 21 Jahr die Zahl 3762,49; und in der Columnne C bei 20 Jahr, 224,09. Es ist  $3762,49 / 224,09 = 16,79$ . Dies ist der baare Wehrt der Leibrente 1, für eine Person von 20 Jahren, wenn die Zinsen des Geldes zu 4 Procent gerechnet werden.“

Hier handelt es sich um eine nachschüssige (postnumerando) Leibrente, da sie am Ende eines Jahres zu zahlen ist. Dagegen nennt man eine im voraus zu leistende Zahlung vorschüssig (praenumero). Der Barwert einer jährlich vor- bzw. nachschüssig zahlbaren Leibrente lässt sich auch wie folgt einfach berechnen:

- vorschüssig: Spalte E / Spalte C
- nachschüssig: Spalte E / Spalte C - 1

Übrigens findet man eine Diskontierung bereits in dem 1585 veröffentlichten Buch L'Arithmetique von Simon Stevin [9].

Mit Hilfe der Spalte D der Tabelle von Tetens lässt sich auch die mittlere künftige Lebenserwartung berechnen. Tetens wählte die Bezeichnung mittlere Lebensdauer. Unter Punkt 57 erläuterte er diese: „Ex. Das gegebene Alter sey 15 Jahr, so ist  $A = 511$ . Die bey dem 16ten Jahr stehende Zahl unter D, ist 19451. Nun ist  $19451/511 + \frac{1}{2} = 38,06 + 0,5 = 38,56$ . Dies ist die mittlere Lebensdauer.“

Tetens nennt zu Beginn seiner Vorrede Halley und Moivre. Dann zitiert er folgende zwei Schriften von Simpson: „Doctrine of Annuities and Reversions“ (1742) und „Select Exercises for the young Proficients in the Mathematics“ (London 1752). Anschließend führt Tetens aus: „Von den neuern brittischen Schriftstellern in dieser Materie sind mir nur Morgan und Price als solche bekannt geworden, die etwas vorzügliches und etwas eigenes geleistet haben. In der allgemeinen Theorie bleiben beyde bey Simpson stehen. Morgan hat eine doppelte Berechnungsart der Renten gewiesen, die allerdings vielen Werth hat. Doch scheint Herr Doct. Price, der sie mit Recht sehr empfiehlt, ihr etwas zu viel Vorzüglichkeit zuzuschreiben. Ich habe sie nicht so leicht und kurz gefunden, dass ich nicht Gründe gehabt, noch auf eine andre zu denken, und diese jener vorzuziehen. Man mag selbst vergleichen und urtheilen.“

Tetens Urteil zum Stand in Deutschland lautet: „Im Jahr 1752 als Simpsons oben erwähnte „Select Exercises“ herauskamen, schien man in Deutschland noch nicht einmal die Elemente dieser Rechnungen zu kennen. Wittwen- Waysen- und Todten-Cassen hatten wir. Aber welche? Alle auf Gerathewohl, oder nach einem ohngefahren, just in diesen Materien am öftersten trüglichen Ueberschlag entworfen, ...“

Von den zahlreichen Büchern, die Tetens verfasste, sei in diesem Zusammenhang noch das folgende angeführt: „Nachricht von dem Zustande der allgemeinen Wittwen-Casse zu Copenhagen am Schluß des Jahres 1797,1803“.

**Die Persönlichkeit Tetens**

Nach Brockhaus war Tetens ein deutscher Philosoph und Psychologe, der ab 1776 als Professor der Philosophie in Kiel lehrte, seit 1789 lebte er in Kopenhagen. Er beeinflusste den Kritizismus von Immanuel Kant (1724-1804). In Meyers Konversationslexikon ist u.a. zu lesen, dass Tetens 1789 als Finanz- und Versicherungsbeamter in Kopenhagen tätig war. In der Encyclopædia Britannica wird noch „Über die allgemeine spekuativische Philosophie“ (1775: „On general speculative Philosophy“) erwähnt.



### Erste Diskontierung von Simon Stevin

Mit der Diskontierung hatte sich schon zweihundert Jahre früher Simon Stevin (um 1548-1620) befasst. Abbildung 2 zeigt einen Ausschnitt aus einer Tabelle seines Werks „L'Arithmetique“ von 1585 [9]. Ausgehend von einem Betrag von 10 Milliarden berechnete Stevin für eine Reihe von Zinssätzen diskontierte (abgezinst) Werte für jeweils 30 Jahre. Der für fünf Jahre diskontierte Betrag von 8 219 271 bei einem Zinssatz von 4% errechnet sich (in heutiger Schreibweise) wie folgt:  $\frac{10^{10}}{1,04^5} = 8\,219\,271$ . Der Diskontierungsfaktor  $\frac{1}{q^n}$  unterscheidet sich nicht von jenem, den Tetens gebraucht. Während Stevin jeweils den Betrag von 10 Milliarden heranzieht, setzt Tetens dafür die Anzahl der Überlebenden einer Sterbetafel ein. Welchen Verlauf hätte die Entwicklung der Leibrentenbewertung genommen, wenn es zur Zeit Stevins schon eine Sterbetafel gegeben hätte? Man mag darüber spekulieren.

Abb. 2

D'ARITHMETIQUE. 75<sup>r</sup>

Table d'intereſt de 4 pour 100.

1.	9615385	9615385
2.	9245562	18860947
3.	8889963	27750910
4.	8548041	36298951
5.	8219270	44518221
6.	7903144	52421365
7.	7599177	60020542
8.	7306901	67327443
9.	7025866	74353309
10.	6755640	81108949
11.	6495808	87604757
12.	6245969	93850726
13.	6005739	99896465
14.	5774749	105631214
15.	5552643	111183857
16.	5339080	116522937
17.	5133731	121656668
18.	4936280	126592948
19.	4746423	131339371
20.	4563868	135903239
21.	4388335	140291574
22.	4219553	144511127
23.	4057262	148568385
24.	3901213	152469602
25.	3751166	156220768
26.	3606890	159827658
27.	3468163	163295821
28.	3334772	166630593
29.	3206512	169837105
30.	3083185	172920290

Auszug aus dem Werk von Simon Stevin „L'Arithmetique“. Leyden 1585.

Stevin, ein Verfechter der Dezimalbruchrechnung, veröffentlichte im Jahr 1585 das Buch De Thiende (Dezimalbruchrechnung). Außerdem forderte er die Einführung dezimal unterteilter Münz-, Maß- und Gewichtssysteme. Während andere negative Zahlen ablehnten, hatte Stevin diese anerkannt. Er setzte sich auch für die indisch-arabische Zahlenschreibweise von Brüchen ein. Den für den Schiffbau wichtigen Begriff des Metazentrums führte Stevin ein. Er war ein Anhänger der kopernikanischen Lehre.

### Lebenserwartung und Versicherungstarife

Im vergangenen Jahr entbrannte in den USA eine Diskussion über die versicherungsmathematische Ungleichbehandlung von „Handwerklichen Arbeitern“ (Blue-collar) und „Bürobeschäftigten“ (White-collar). Die Wirtschaftspresse berichtete im Mai 2003, dass amerikanische Industriekonzerne möglicherweise mehrere Milliarden Dollar an Pensionsverpflichtungen aus ihrer Bilanz entfernen können. Eine empirische Studie der Society of Actuaries (Gesellschaft amerikanischer Versicherungsstatistiker) ergab, dass die Arbeiter eine geringere Lebenserwartung aufweisen als Bürokräfte.

Demgegenüber will die EU einheitliche Versicherungstarife für Männer und Frauen durchsetzen (SZ vom 31. Juli 2003). Der erste, der auf die Längerlebigkeit der Frauen aufmerksam machte, war Johann August Ritter. Er begann nach eigenen Angaben 1768 über Witwencassen zu schreiben; siehe BIZ 5/2002 S. 207 und 208 [5]. Die von Ritter verfasste Schrift „Oeconomisch-politische Auflösung der wichtigsten Fragen, welche itzo wegen der Einrichtung dauerhafter Witwencassen aufgeworfen werden“ hat Herr Euler für gründlich abgefasst erkannt, schrieb seinerzeit A.G. Kästner.

Handelt es sich bei der Längerlebigkeit der Frauen auch um einen charakteristischen Tatbestand wie bei der Geschlechterproportion? Die Bevölkerungsstatistik zeigt, dass das zahlenmäßige Verhältnis der geborenen Knaben und Mädchen von erwähnenswerter Konstanz ist. Bekanntlich kommen auf 100 geborene Mädchen ungefähr 106 Knaben. Den unterschiedlichen Anteil der beiden Geschlechter an den Geburten beobachtete schon John Graunt (1620-1674), der – wie Süßmilch (1707-1767) berichtete – erkannte, dass sich die Töchter zu den Söhnen verhalten wie 1000 zu 1068. Graunt verfügte über Aufzeichnungen der in London von 1629 bis 1661 Geborenen.

### Schlussbemerkung

Begriffe wie Rente, Zins und Lebenserwartung werfen Fragen nach der historischen Entwicklung der Sterblichkeitsmessung auf. Dabei spielten die Fortschritte der Rechentechnik eine maßgebliche Rolle. Die Anwendung von Mathematik und Statistik war richtungs-



weisend für die Lebens- und Rentenversicherung. Ein Abriss zu diesen Themen ist für später geplant. Mit dem Phänomen Zeit befassen sich die Menschen schon immer und damit wohl auch mit Fragen zur menschlichen Lebenszeit. In Platons (427-347 v. Chr.) Dialog Timaios (Die Welterschöpfung) wurde schon die Lebensspanne des Menschen erörtert: Die Wahl fiel auf die kürzere, doch edlere Lebenszeit anstelle einer längeren, doch unbedeutender hingebachten Lebenszeit (Übers. von Hans Günter Zekl).

#### Literaturnachweis:

[1] Hirtz, Helmut: Bayerische Sterbetafel 1996/98. In: Bayern in Zahlen. Zeitschrift des Bayerischen Landesamts für Statistik und Datenverarbeitung. 132. (55.) Jahrgang. Heft 8/2001. S. 289 ff.

[2] Schweizerische Volkssterbetafel 1931/41 und 1939/44. Statistische Quellenwerke der Schweiz Heft 232, Reihe Bk 4, Bern 1951

[3] Tetens, Johann Nicolaus: Einleitung zur Berechnung der Leibrenten und Anwartschaften, die vom Leben und Tode einer oder mehrerer Personen abhänngen. Bd. 1 .Leipzig 1785.

[4] Cicero, Marcus Tullius: De officiis. Lateinisch/deutsch = Vom pflichtgemäßen Handeln. Übersetzt, kommentiert und herausgegeben von Heinz Gunermann. Stuttgart 1976.

[5] Hirtz, Helmut: Bayerische Sterbetafeln - ein methodisch-historischer Streifzug. In: Bayern in Zahlen. Zeitschrift des Bayerischen Landesamts für Statistik und Datenverarbeitung. 133. (56.) Jahrgang. Heft 5/2002. S. 193 ff.

[6] Lorenz, Hildegard: Die Pioniere der bayerischen Statistik und ihre Erben. Unveröff. Manuskript. Landesamt für Statistik und Datenverarbeitung.

[7] Knobloch, Eberhard: Die Schriften im Überblick. In: Gottfried Wilhelm Leibniz Hauptschriften zur Versicherungs- und Finanzmathematik. Berlin 2000.

[8] Marquardt, Joachim: Römische Staatsverwaltung. Bd 2. Darmstadt 1957.

[9] Stevin, Simon: L'Arithmetique. Leyden 1585.