Historisches zum Zins und ein Querschnitt zum geometrischen Wachstum

Helmut Hirtz

Im Mittelpunkt von Finanzangelegenheiten steht der Zins, einer der zentralen Preise einer Volkswirtschaft. Der Preis für die leihweise Überlassung von Kapital hat eine bewegte Geschichte aufzuweisen: erlaubt und verboten. Im Kampf der Geldbedürftigen mit den Geldbesitzenden war und ist der Zinssatz (Zinsfuß) essentiell.
Zins, Barwert und Endwert sind beim Vergleich von Geldgeschäften wichtige Kennzahlen. Zinsfuß und die mittlere Lebenserwartung prägen die Höhe einer Leibrente. Ehe man sich für ein Leibrentengeschäft entscheidet, kann man mit Hilfe der Zinseszinsrechnung noch alternative Berechnungen anstellen. So kann mit den gegebenen drei Größen (Höhe der Leibrente, vereinbarter Zinsfuß und durchschnittliche Lebenserwartung des Rentenempfängers) für Vergleichszwecke der anfängliche Darlehensbetrag (Anfangswert) bestimmt werden. Mit den genannten Ausgangsdaten lässt sich andererseits der Endbetrag einer periodischen Kapitaleinzahlung (Sparprogramm) ermitteln. Es wurde an anderer Stelle bereits erwähnt, dass eine angemessene Bewertung von Leibrenten erst mit der Berücksichtigung der Sterblichkeit und des Zinssatzes möglich wurde. Grundlagen der Versicherungsmathematik sind bekanntlich eine Sterbetafel und die Zinseszins- und Rentenrechnung.
Beim Aufbau einer zusätzlichen Altersversorgung in jungen Jahren sollte der Zinseszinseffekt nicht unterschätzt werden, von den „Zehrern“ Steuern und Inflation einmal abgesehen.
Schon immer haben finanzielle Dinge im menschlichen Leben einen breiten Raum eingenommen, wobei dem Zins eine zentrale Rolle zufällt. Mit einem Blick in die Historie von Zins und Zinseszins befasst sich dieser Beitrag. Daneben wird das Thema „Geometrisches Wachstum und Zins“ angerissen. Dabei wird sich auch zeigen, wie es sich mit dem Zinseszinseffekt verhält.
Beachtung verdient die besondere Zahl e (Basis der natürlichen Logarithmen), deren erste Anfänge im 17. Jahrhundert auszumachen sind. Die vielen Anwendungsmöglichkeiten dieser Zahl zeigen die Begriffe „Zinseszinsfunktion“ oder „Gesetz des organischen Wachstums“. Dieser Zahl begegnet man auch im „Gompertz’schen Gesetz“, das dem Verlauf der Sterblichkeit im hohen Alter näherungsweise entspricht. Eine Vielzahl von alltäglichen Problemen haben mit Populationsentwicklungen zu tun. Gestreift wird eine Population, deren Verhalten recht einfach ist. Gemeint ist eine solche von Euros auf einem Bankkonto. Beleuchtet wird auch das Verhalten eines Sparkontos im Zusammenhang mit einer logistischen Gleichung, die interessante Eigenschaften aufweist.

Zinsen waren schon den Babyloniern vertraut

Gläubiger und Schuldner standen sich in der mesopotamischen Gesellschaft seit langem gegenüber (Horst Klengel: König Hammurapi und der Alltag Babylons. Zürich 1991). Im historischen Babylonien, eine der ältesten Hochkulturen der Menschheit, war der Begriff Zinsen schon bekannt. Nach Michael Jursa war Anfang des zweiten Jahrtausends vor Christus Geld- und Naturalienverleih gegen Zinsen zu einem großen Teil eine Domäne der Kaufleute.

Auf M. Crassus anspielend sagt Cicero (106 - 43 v.Chr.) in *Paradoxa stoicorum* (Stoische Paradoxien, VI 45): „Viele haben dich gehört, als du erklärtest, niemand sei reich, wenn er mit seinen Zinseinkünften nicht ein Heer ernähren könne, wozu das römische Volk trotz so gewaltiger Steuereinnahmen schon längst kaum noch in der Lage ist." (Rainer Nickel).

L. Annaeus Seneca (um 4 v. - 65 n. Chr.) schreibt in einem seiner Briefe (*ep*. 87,7): „quia magnus kalendari liber volvitur" (weil ein großes Zinsbuch gewälzt wird).

Aus der Schrift *De ira* III 33 3 (Über den Zorn) von Seneca sei folgende Stelle wiedergegeben (in das Deutsche übertragen von Dr. Helmut Zäh): „Was, wenn wegen eines Zinses, selbst von nur einem Zehntel Prozent (einem Tausendstel), ein kranker Wucherer, obwohl seine Füße gelähmt und seine Hände zum Raffen (comparandum) / zum Zusammenrechnen (computandum) nicht mehr imstande sind, schreit und mit Hilfe eines Zahlungsbefehls seine Pfennige (Asse) selbst bei akuten Krankheitsanfällen einfordert?" [1]

„Der Zinswucher war ein altes Übel in Rom und bildete die häufigste Ursache von Aufruhr und Zwietracht" schrieb Tacitus (etwa 55 - 116) in seinen *Annalen* (VI 16).

Spuren der Wirtschaftskunde findet man schon im griechischen Altertum. Der griechische Philosoph Aristoteles (384 - 322), Schüler von Platon und Lehrer von Alexander dem Großen, nahm in *Politik* Stellung zum Zins (τόκος [bedeutet: a) das Gebären, Geburt. b) Nachkommenschaft, Kind(er). c) Gewinn, Zinsen"]). Unter anderem heißt es: „und so ist auch der Zins wieder Geld vom Gelde". Die Philosophie von Aristoteles ist für das Abendland sehr einflussreich gewesen. Albertus Magnus (um 1193 - 1280) machte die Werke von Aristoteles dem christlichen Abendland zugänglich. Thomas von Aquin (1225 - 1274), ein Schüler von Albertus Magnus, bevorzugte in der Philosophie Aristoteles. Er stellte die Frage nach der Berechtigung des Zinses. Das kanonische Zinsverbot wurde so begründet: „Geld kann keine Jungen werfen" (nummus non parit nummos). Gegen das Zinsnehmen sprach sich auch Martin Luther (1483 - 1546) aus. Allerdings wurde gegen das Zinsverbot immer wieder verstoßen.

Lombarden wurden nicht nur die Bewohner der Lombardei genannt. Mit diesem Wort bezeichnete man im späteren Mittelalter die Geldwechsler und Pfandleiher, die ursprünglich aus Oberitalien kamen und neben den Juden Kreditgeschäfte gegen Zins übernahmen. Bekannt ist die Lombard Street in der Innenstadt von London, Sitz großer Banken. Heute sind bedeutende Finanzinstitute im Londoner Geschäftsviertel Canary Wharf angesiedelt.

William Shakespeare (1564 - 1616) setzte mit Shylock im Schauspiel *Der Kaufmann von Venedig* dem Geldverleiher ein Denkmal. In der 1494 von Luca Pacioli veröffentlichten *Summa* wurde schon darauf hingewiesen, dass bei der Zinsrechnung der Monat zu 30 und das Jahr zu 360 Tagen gerechnet werden.

Im Mittelalter hießen in Italien die Staatsanleihen montes (Berge). Zur Bekämpfung des Wuchers entstanden, zuerst von kirchlicher Seite, die montes pietatis, die gegen Pfand billige Darlehen gaben.

An den Handelsplätzen der Welt war der Fuggerbrief ein begehrtes Papier. An der Börse von Antwerpen nahmen die Fugger Geld zu einem Zinssatz von etwa 10% auf und gaben es zu etwa 15% weiter (Stephan Finsterbusch in der *F.A.Z*. vom 6.7.1999, S. B 10).

In seinem Beitrag *Vom Credo zum Kredit* schrieb Christoph Albrecht in der *F.A.Z*. vom 29.8.2001: „Der betrügerische Bankrott ersetzte im 18. Jahrhundert den Tatbestand des Wuchers, der im Laufe des 17. Jahrhunderts außer Gebrauch gekommen war. Denn die neuen Bankrott-Regeln zielten nicht länger auf die Gläubiger, sondern auf die Schuldner." Der Autor sieht den Grund dafür in der Ausweitung des internationalen Handels auf der Basis von Wechseln, die Kaufleute im 17. Jahrhundert wie eine Währung nutzten. Wechsel dienten als eine Form von Papiergeld. Regelwerke wie die *Leipziger Wechselordnung* von 1681 sollten sicherstellen, dass Wechsel, Buch- und andere Schulden zum Verfallstermin prompt bezahlt würden. „Diese Wechselordnungen sanktionierten unausgesprochen die bis dahin verpönten Zinsgeschäfte."

Der Bankier Hermann Josef Abs (1901-1994), u.a. Leiter der deutschen Delegation bei der Londoner Schuldenkonferenz (1953), soll einmal sinngemäß geäußert haben, dass er mit sich über die Höhe des Zinses reden lasse, wenn das Darlehen nicht zurückgezahlt werden muss.

Zins auf Zins

Unter Zinseszins versteht man gewöhnlich die Verzinsung des Zinses bei einem während mehrerer Jahre angelegten Kapital. Für das Nehmen von Zinseszins war das Wort Anatozismus gebräuchlich (griech. aufhäufen). Nach dem *Kleinen Sto-*

1 Zäh weist darauf hin, dass das Wort „computandum" nicht in den mittelalterlichen Seneca-Handschriften überliefert ist, sondern die Konjektur eines späteren gelehrten Herausgebers ist. Überliefert ist in den Handschriften statt dessen „comparandum". Was Seneca tatsächlich geschrieben hat, wird sich vermutlich nie mehr eindeutig klären lassen.

wasser bedeutet anatocismus „Zins auf Zins“. Das Zinsverbot wurde allerdings durch eine Reihe von Ausnahmen durchbrochen.

Nach Michael Jursa war in Babylonien das Konzept von Zinseszinsen bekannt, sie wurden aber selten erhoben. Zinseszinsaufgaben lösten die Babylonier mit Hilfe von Zweierpotenzen. Zu einem bemerkenswert genauen Ergebnis gelangten sie bei einer Zinseszinsaufgabe, bei der die Zeit als Unbekannte auftrat. Im Louvre wird eine Tafel aufbewahrt, die Erstaunen hervorruft. Diese stammt aus der Zeit um 1700 vor Chr. und weist die folgende Frage aus: Wie lange dauert es bis sich ein Geldbetrag verdoppelt, wenn jährlich Zinsen von 20 % berechnet werden, vgl. Eves, Howard W.: An introduction to the history of mathematics. Philadelphia …1983. Da kein Anfangsbetrag angegeben wurde, lässt sich das Problem in heutiger Schreibweise wie folgt darstellen: $1{,}2^x = 2$.
Die Lösung der Babylonier lautet in dem von ihnen benutzten Sexagesimalsystem (Zahlsystem mit der Basis 60): 3; 47, 13, 20. Das bedeutet in dezimaler Darstellung $x = 3{,}7870$ und erreicht fast den tatsächlichen Wert von 3,8018. Ein bemerkenswertes Ergebnis, wenn man bedenkt, dass ihnen die heute gebräuchlichen Logarithmen (vermutlich) nicht zur Verfügung standen.

Den Babyloniern war übrigens auch der Lehrsatz des Pythagoras lange vor den Griechen als eine Erfahrungs-Tatsache bekannt. Der Beweis dieses berühmten Lehrsatzes der Planimetrie wurde Pythagoras (ca. 580 - 496) zur Ehre angerechnet.

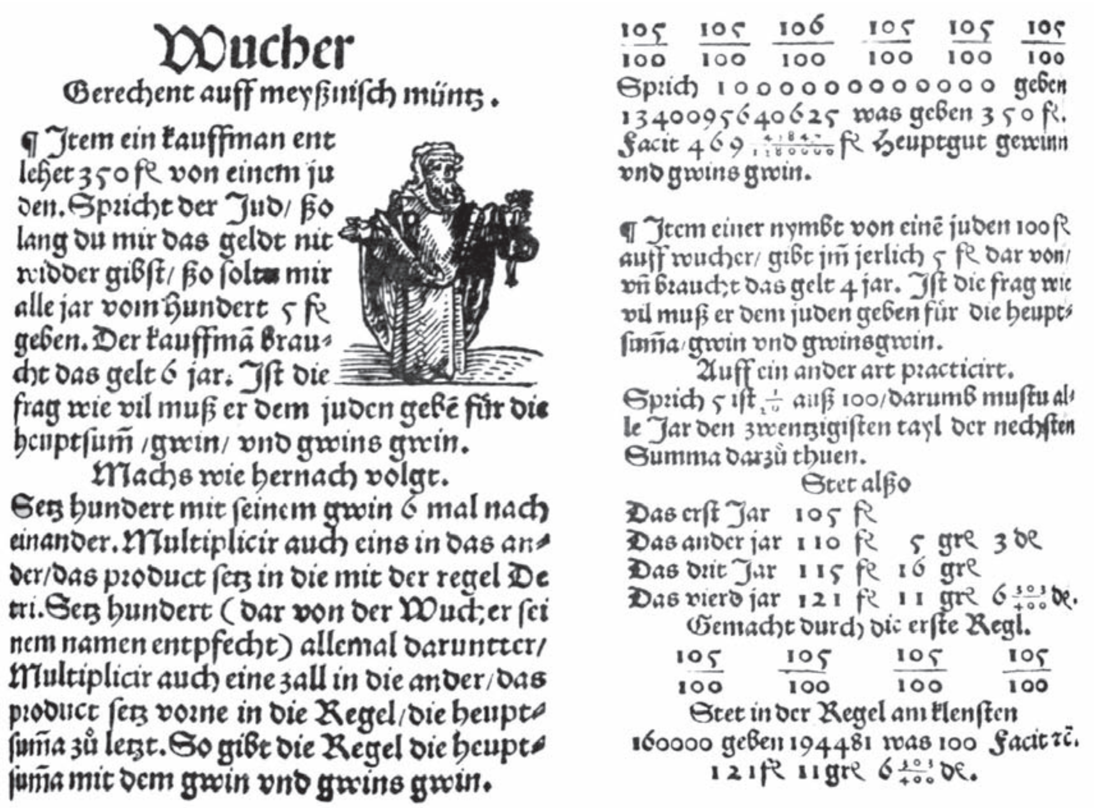
Luca Pacioli behandelte in seiner 1494 veröffentlichten *Summa* auch Zinseszinsaufgaben. Sie ermöglichten eine Lösung für höchstens zehn Jahre und unterstellten dabei Proportionalität für den Gewinn (Gericke, Helmuth: Mathematik im Abendland. Berlin 1990).

Potenzen

Vorab ein Beispiel zur Mächtigkeit der Potenzen. Verdoppelt man die Seitenlänge eines Quadrats, so ergibt sich die vierfache Fläche; verdreifacht kommt man auf die neunfache Fläche und vervierfacht auf die sechzehnfache Fläche.

Die Potenzen treten in vielen Formeln und Gesetzen der Mathematik, der Naturwissenschaft und der Technik auf; zum Beispiel stellt in der Geometrie $\frac{4}{3}\pi r^3$ das Volumen einer Kugel dar, $\frac{s^2}{4}\sqrt{3}$ die Fläche eines gleichseitigen Dreiecks und die Rentenformel $b \cdot \frac{r^n - 1}{r - 1}$ in der Zinseszins- und Rentenrechnung.

Abb. 1



Wucher
Gerechent auff meyßnisch müntz.
¶ Item ein kauffman entlehet 350 fl von einem juden. Spricht der Jud/ so lang du mir das geldt nit widder gibst/ so soltu mir alle jar vom hundert 5 fl geben. Der kauffmā braucht das gelt 6 jar. Ist die frag wie vil muß er dem juden gebē für die heuptsum̄/gwin/ vnd gwins gwin.
Machs wie hernach volgt.
Setz hundert mit seinem gwin 6 mal nach einander. Multiplicir auch eins in das ander/das product setz in die mit der regel De tri. Setz hundert (dar von der Wucher sein nem namen entpfecht) allemal darunter/ Multiplicir auch eine zall in die ander/das product setz vorne in die Regel/die heuptsum̄a zů letzt. So gibt die Regel die heuptsum̄a mit dem gwin vnd gwins gwin.

$\frac{105}{100}$ $\frac{105}{100}$ $\frac{106}{100}$ $\frac{105}{100}$ $\frac{105}{100}$ $\frac{105}{100}$

Sprich 1000000000000 geben 1340095640625 was geben 350 fl. Facit 469 $\frac{41847}{1250000}$ fl Heuptgut gewinn vnd gwins gwin.

¶ Item einer nymbt von einē juden 100 fl auff wucher/ gibt jm̄ jerlich 5 fl dar von/ vñ braucht das gelt 4 jar. Ist die frag wie vil muß er dem juden geben für die heuptsum̄a/gwin vnd gwinsgwin.
Auff ein ander art practicirt.
Sprich 5 ist $\frac{1}{20}$ auß 100/darumb mustu alle Jar den zwentzigisten tayl der nechsten Summa darzů thuen.
Stet alßo

Das erst Jar	105 fl		
Das ander jar	110 fl	5 grē	3 dē
Das drit Jar	115 fl	16 grē	
Das vierd jar	121 fl	11 grē	6 $\frac{303}{400}$ dē.

Gemacht durch die erste Regl.

$\frac{105}{100}$ $\frac{105}{100}$ $\frac{105}{100}$ $\frac{105}{100}$

Stet in der Regel am klensten
160000 geben 194481 was 100 Facit etc.
121 fl 11 grē 6 $\frac{303}{400}$ dē.

Aus: Apian, Peter: Eyn Newe unnd wolgegründte underweysung aller Kauffmanß Rechnung … . Nachdruck [der Ausgabe Ingolstadt 1527] Buxheim 1995.

Für alle reellen Zahlen $a \geq -1$ und ganze Zahlen $n \geq 1$ ist
$(1 + a)^n \geq 1 + n\,a$ (Bernoulli'sche Ungleichung).
Das Gleichheitszeichen gilt für $n = 1$ oder $a = 0$.

Im Rahmen seiner Zinseszinsrechnungen bemerkte Leibniz (1646 - 1716): „Für höhere Potenzen werden wir Logarithmen zur Anwendung bringen, …“ (Leibniz 2000, S. 201).

Wucher bedeutet bei Petrus Apianus Zinseszinsrechnung

Peter Apian (1501 - 1552), eigentlich Bienewitz, weist in seiner *Kauffmanß Rechnung* aus dem Jahr 1527 Zinseszinsaufgaben unter Wucher aus. Sein Beispiel lautet: Ein Kaufmann leiht sich 350 fl für 6 Jahre zu einem Zins von 5% (s. Abb. 1). Gelöst wird die Aufgabe über einen Dreisatz. In die heutige Potenzschreibweise übertragen:

$$\frac{105^6}{100^6} \cdot 350 = 469{,}03.$$

Der ausführliche Titel seiner 1527 in Ingolstadt gedruckten Schrift lautet: *Eyn Newe unnd wolgegründte underweysung aller Kauffmanß Rechnung in dreyen Büchern*.

Am Rande sei erwähnt, dass Peter Apian den bayerischen Erbprinzen Albrecht [Herzog Albrecht V.] auf der 1472 gegründeten Hochschule in Ingolstadt in Kosmo- und Geographie wie in Mathematik unterrichtete. Peter Apian wurde weiten Kreisen durch seine 1524 erschienene Cosmographia bekannt. Sein Sohn Philipp wurde 1554 vom bayerischen Herzog Albrecht V. mit der ersten Landvermessung Bayerns beauftragt.

Zinstafeln

Im Jahr der Einführung des Gregorianischen Kalenders 1582 erschien die Schrift *Tafelen van Interest* von Simon Stevin (um 1548 - 1620). Diese Tafeln dienten einem dringenden praktischen Bedürfnis, so Helmuth Gericke und Kurt Vogel. Stevin nannte als (einzigen) Vorläufer Zinstafeln, die im dritten Buch der Arithmetik von Trenchant (1558) gedruckt wurden und die er erweitert hatte. Sonst gab es nur handschriftliche Zinstafeln, die von den Besitzern geheim gehalten wurden.

Marco Bragadino scheint über keine handschriftlichen Zinstafeln verfügt zu haben. Der bayerische Herzog Wilhelm V. setzte in diesen wegen der Finanzprobleme im Staatshaushalt große Hoffnung. Im Jahr 1575 türmte sich eine Schuldenlast von 300 000 Gulden auf. Bragadino, der auch Papst Gregor XIII. um einen Geldbetrag erleichterte, erwies sich als Hochstapler und wurde 1591 hingerichtet. Der drohende „Generalanstand“ [Staatsbankerott] führte 1597 zur Abdankung von Wilhelm V. Die Erschütterungen der Weltwirtschaft im Zeitalter der überseeischen Handelsausweitung waren die Ursache.

Die Finanzkrise, die nicht auf Schlamperei und Verschwendungssucht beruhte, meisterte sein Sohn Maximilian I., der die Regierungsgeschäfte übernahm.

Diskontierungstabellen von Stevin 1585

Im Jahr 1585 erschienen Tabellen mit Abzinsungen (Diskontierung) von Simon Stevin. Ausgehend von 10 Millionen, berechnete er diskontierte Werte zu unterschiedlichen Zinssätzen für jeweils 30 Jahre. Über dieses Werk (*La pratique d' arithmetique.* In: *L' Artihmetique*. Leyden 1585) wurde bereits an anderer Stelle berichtet.

Verfahren zur Berechnung des Periodenzinssatzes

Isaac Newton (1642 - 1727) schuf ein iteratives Lösungsverfahren zur Berechnung des Periodenzinssatzes für einen Kredit, der über Annuitäten getilgt wird. Ausgangsdaten hierfür sind die Anzahl der Zinsperioden, der Darlehensbetrag und die Annuität.

Handliche Regel zur Barwertberechnung

Den Ausführungen von Leibniz (1646 - 1716) im Abschnitt III. 17. Über Pensionen lässt sich eine griffige Formel zur Bestimmung des Barwerts einer nachschüssigen Zeitrente entnehmen (Leibniz 2000, S. 529):

$$\frac{b - b^{a+1}}{1 - b}\,p.$$

Dabei bedeuten:

a = Anzahl der Zinsperioden,

$b = \frac{v}{v+1}$.

In heutiger Schreibweise wählt man für b den Kehrwert von: 1 + Zinssatz / 100.

p = Jährliche Pension,

v = die Zahl, die den Zinssatz zum Ausdruck bringt; z.B. 20 für 5%.

Dieser Ausdruck besticht wegen seiner Kürze. Zum gleichen Ergebnis führt folgende Formel von Leibniz:

$$\left(\frac{1 - b^{a+1}}{1 - b} - 1\right) p$$

Barwert beruht auf einer geometrischen Reihe

Der Barwert einer Rente gibt den Betrag an, der am Anfang der Laufzeit zu zahlen ist, wenn der Endwert der Rente durch eine einmalige Zahlung abgelöst werden soll. Man erhält den Barwert der nachschüssigen Rente B_n durch Diskontierung des

Endwerts der Rente auf den Beginn der Rentenzahlung. Der Endwert einer nachschüssigen Rente ergibt sich als Summe der geometrischen Reihe

$S_n = r + r\,q + r\,q^2 + r\,q^3 + \ldots + r\,q^{n-1} = r\frac{q^n - 1}{q - 1}$.

S_n = Endwert (nachschüssig)

p = Zinsfuß je Jahr, $q = 1 + \frac{p}{100}$

r = Betrag der wiederkehrenden Zahlungen

n= Anzahl der Zahlungstermine (Jahre)

Den Barwert B_n erhält man durch Diskontieren des Endwertes. $B_n = S_n \cdot \frac{1}{q^n} = r \cdot \frac{1}{q^n} \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$.

Die Größe $\frac{q^n - 1}{q^n\,(q - 1)}$ kann ggf. Barwert-Tabellen entnommen werden.

Leibniz stellte bereits heraus, dass die richtige Berechnung des Gegenwärtigen Werts eines geschuldeten Kapitals eine geometrische Reihe bildet. Für diese genaue Berechnung gebrauchte er übrigens eine kompakte Formel (z. B. für 5 Jahre): $v + v^2 + v^3 + v^4 + v^5 = \frac{v - v^6}{1 - v}$. Dabei ist v letztlich der reziproke Wert von $1 + \frac{p}{100}$ [bei jährlicher Berechnung]. Die populäre Berechnung nannte Leibniz dagegen harmonisch.

Bestimmung der Zinsperioden mittels Logarithmen

Die Zinseszinsrechnung erhielt durch die Logarithmen einen gewaltigen Schub. Die Logarithmen ermöglichten die genaue Bestimmung der Anzahl der Zinsperioden. Leonhard Euler (1707-1783) zeigte wie eine Aufgabe gelöst werden kann, bei der nach der Anzahl der Jahre gefragt ist, bis eine Schuld abgetragen wird (bei jährlicher Rückzahlung eines festgelegten Betrages und einem vereinbarten Zinssatz), vgl. Michelsen, Johann Christian: Leonhard Eulers Einleitung in die Analysis des Unendlichen/1. Berlin 1788.

Ein weiteres Beispiel von Euler befasste sich mit folgender Frage: In wie vielen Jahren wächst das menschliche Geschlecht auf das Zehnfache an, wenn die jährliche Vermehrung 1/100 ist?

Der Einfluß der Zinszuteilung

Bei der Zinszahlung gilt als wichtigste Periode ein Kalenderjahr. Wählt man kürzere Zinsperioden (z.B. halbjährlich oder vierteljährlich), dann spricht man von unterjähriger Verzinsung. Man kann fragen, wie sich die Anzahl der Zinsperioden auf das Wachstum eines Sparkontos auswirkt. Die Entwicklung eines Sparkontos von beispielsweise 1 000 Euro bei einem Zinssatz von 10 % und einer zehnjährigen Laufzeit gibt für unterschiedliche Zinsperioden folgendes Bild:

Zinsperiode	Betrag in €
Jahr	2 593,74
Vierteljahr	2 685,06
Monat	2 707,04
Tag (360)	2 717,90
Stunde	2 718,27
Minute	2 718,28
Sekunde	2 718,28

Es zeigt sich, dass eine häufigere Zinszuteilung zwar zu einem höheren Endkapital führt, das Wachstum aber begrenzt ist. Dabei fällt auf, dass mit einer wachsenden Anzahl von Zinsterminen (Stetige Verzinsung) sich ein Betrag herausbildet, der der Zahl e (Basis der natürlichen Logarithmen) sehr nahe kommt. Man kann also sagen, die Zahl e ist das extreme Ergebnis einer Zinseszinsrechnung. Anders ausgedrückt: Die Zahl e ist der Grenzwert der Folge mit dem allgemeinen Glied $b_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$.

Nachfolgende Übersicht macht deutlich, dass ein weiteres Anwachsen von n das Ergebnis kaum mehr beeinflusst, Änderungen nur noch an weiter rechts stehenden Dezimalstellen vorkommen.

n	$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$
1	2
10	2,59374 24601
100	2,70481 38294
1 000	2,71692 39322
10 000	2,71814 59268
100 000	2,71826 82372
1 000 000	2,71828 04693
10 000 000	2,71828 16925
100 000 000	2,71828 18149
1 000 000 000	2,71828 18271

e = 2,71828 1828 …

Die Zahl e = 2,71828 1828… ist die Basis der natürlichen Logarithmen $e = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!}$.

Mit dieser Folge läßt sich e schnell auf verhältnismäßig viele Nachkommastellen genau berechnen. Zum Beispiel erhält man für n = 12 die Zahl e auf 9 Stellen genau: 2, 71828 1828. Siehe nachfolgende Übersicht.

1	+ 1/1!				=	2
1	+ 1/1!	+ 1/2!			=	2.500000000000000000
1	+ 1/1!	+ 1/2!	+	1/3!	=	2.666666666666666667
1	+ 1/1!	...		1/4!	=	2.708333333333333333
1	+ 1/1!	...		1/5!	=	2.716666666666666667
1	+ 1/1!	...		1/6!	=	2.718055555555555556
1	+ 1/1!	...		1/7!	=	2.718253968253968254
1	+ 1/1!	...		1/8!	=	2.718278769841269841
1	+ 1/1!	...		1/9!	=	2.718281525573192240
1	+ 1/1!	...		1/10!	=	2.718281801146384480
1	+ 1/1!	...		1/11!	=	2.718281826198492865
1	+ 1/1!	...		1/12!	=	2.718281828286168564
1	+ 1/1!	...		1/13!	=	2.718281828446759002
1	+ 1/1!	...		1/14!	=	2.718281828458229748
1	+ 1/1!	...		1/15!	=	2.718281828458994464
1	+ 1/1!	...		1/16!	=	2.718281828459042259
1	+ 1/1!	...		1/17!	=	2.718281828459045071

Auf elegante Weise lässt sich die Zahl e mit dem Tröpfel-Algorithmus gemäß Arthur H. J. Sale (1968) berechnen.

$e = 1 + \frac{1}{1}\,(1 + \frac{1}{2}\,(1 + \frac{1}{3}\,(1 + \ldots)))$. Zieht man zur Berechnung von e 12 Glieder heran, so erhält man als Rechenergebnis 2,71828 1829 (Taschenrechner HP 41 [RPN-Modus]) gegenüber genau 2,71828 1828… .

Eine gute rationale Approximation für e ist: 2721/1001 = 2,718281. Berechnung des Verfassers nach dem Algorithmus für die Umwandlung einer Dezimalzahl in eine rationale Zahl von Charles G. Moore: *An Introduction to Continued Fractions*. National Counsil of Teachers of Mathematics, 1964.

Die Zahl e lässt sich übrigens mit sieben Nachkommastellen leicht merken: 2,7 1828 18. In folgender Gliederung lassen sich sogar fünfzehn Stellen der Zahl e leicht einprägen:
2, 7 1828 1828 4590 45.

Erinnert sei an Jost Bürgi (1552 - 1632): Die 10 000. Potenz der von ihm gewählten Zahl 1,0001 ergibt den Wert 2,718146 und stimmt mit der Zahl e = 2,718282 … auf drei Nachkommastellen überein.

Der *Geschichte der Mathematik* von Becker und Hofmann kann entnommen werden, dass Leonhard Euler mit D. Bernoulli (1728) e als Grenzwert von $(1+1/n)^n$ und in Wiedergabe eigener Studien e^x als Grenzwert von $(1+x/n)^n$ im Zusammenhang mit dem binomischen Lehrsatz erklärt.

Das Reziprokum von e:

$$e^{-1} = \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n = 1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + - \cdots.$$

e^{-1} ist angenähert 0,36788.

Exponentialfunktion

Eine Funktion der Form $y = a^x$ heißt Exponentialfunktion ($a > 0$ und $\neq 1$). Wird a = e gesetzt, so erhält man die spezielle Exponentialfunktion $y = e^x$, die oft als Wachstumsfunktion bezeichnet wird. Viele Naturvorgänge führen auf diese Funktion.

Exponentialreihen

Die Exponentialreihe

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}$$

konvergiert für jedes x. Für den speziellen Wert x = 1 ergibt sich der Wert für die Zahl e (s.o.). e^x ist die einzige Funktion, die mit ihrem Differentialquotienten gleich ist. Dies lässt die Bedeutung der Zahl e erkennen.

Historisches zur „Stetigen Verzinsung"

Wenn die Anzahl der Zinsperioden über alle Maßen wächst ($n\to\infty$), dann liegt eine stetige Verzinsung vor. Leider ist über das historische Umfeld des Ausdrucks $(1+1/n)^n$ kaum etwas bekannt. Jakob Bernoulli (1655 - 1705) soll als Erster die Frage nach dem Endkapital bei stetiger Verzinsung gestellt haben. Hierzu dürfte wohl auch Simon Stevin (um 1548 - 1620), der schon 1585 Diskont-Tabellen veröffentlichte, einen gewissen Beitrag geleistet haben.

Jakob Bernoulli stellte sich gelegentlich folgendes Problem: „Nach welchem Gesetz wächst ein auf Zinseszinsen liegendes Kapital, wenn die Zinsen in jedem Augenblick zum Kapital geschlagen werden, wenn sie also nicht erst bis zum Jahresende warten müssen, sondern sogleich, schon im Augenblick ihrer Geburt, mit der Arbeit beginnen und ihrerseits Zinsen tragen?", vgl. Karlson, Paul: Vom Zauber der Zahlen. Berlin 1954, S. 486.

Bei Potenzen bedeutet $x^a = b$ etwas anderes als $a^x = b$. Der erste Ausdruck bedeutet heute Potenzieren und beim letzten handelt es sich um eine Exponentialfunktion. Die Umkehrung des ersten Ausdrucks $x^a = b$ ist die lytische Operation des Wurzelziehens, also $x = \sqrt[a]{b}$. Für den zweiten Ausdruck fand sich erst spät eine Lösungsmöglichkeit. In der ersten Hälfte des 18. Jahrhunderts sagte Leonhard Euler: „Der größte Nutzen, welchen die Logarithmen gewähren, zeigt sich bey der

Auflösung solcher Gleichungen, wo die unbekannte Größe ein Exponent ist". „Hat man z.B. die Gleichung $a^x = b$, und soll man daraus x entwickeln, so kann solches nicht anders als vermittelst der Logarithmen geschehen." (§ 111). Die Logarithmen wurden nicht systematisch entdeckt, sie entwickelten sich aus der Praxis heraus.

Die Formel für die stetige Verzinsung kommt bei jedem organischen Wachstum zur Anwendung. Für stetige (organische) Verzinsung eines Grundbetrages K_0 in n Jahren gilt der Ausdruck $K_n = K_0 \; e^{\frac{p*n}{100}}$.

Mit einer Modifikation (negativer Exponent) gilt entsprechendes für die stetige Abnahme.

Die Zinseszinsrechnung fand in die unterschiedlichsten Gebiete Eingang. Bei Populationsentwicklungen mag zuerst an die Bevölkerungsentwicklung gedacht werden. Aber auch bei einem Sparkonto handelt es sich um eine Population, deren Verhalten noch dazu recht einfach ist. Bekanntlich lassen sich Wachstums- und Zerfallsprozesse durch eine Exponentialfunktion beschreiben.

Kontinuierliche Verzinsung

Vom ökonomischen Standpunkt aus spielt die Zahl e bei der kontinuierlichen Verzinsung und in der Wachstumstheorie eine zentrale Rolle. Nachfolgend eine Darstellung der kontinuierlichen Verzinsung (nach *Meyers Großer Rechenduden*).

Werden zu einem Anfangskapital K_0 beim Zinssatz p % je Jahr jeweils nach 1/m Jahr die Zinsen hinzugetan und dann mitverzinst, so wächst das Kapital in n Jahren an auf den Betrag

$$K_n = K_0 \left(1 + \frac{p}{100 \cdot m}\right)^{m \cdot n}.$$

Man kann sich vorstellen, dass die Zinsen in jedem Augenblick, also kontinuierlich, dem Kapital zugeschlagen werden. Will man dafür eine Formel entwickeln, so muss man die Zahl der Zinstermine unendlich groß werden lassen, das heißt

$$K = \lim_{m \to \infty} K_n = \lim_{m \to \infty} K_0 \left(1 + \frac{p}{100 \cdot m}\right)^{m \cdot n}$$

ist zu berechnen.

Setzt man $\frac{p}{100 \cdot m} = \frac{1}{x}$, so bekommt man

$$K_n = K_0 = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{\frac{x \cdot p \cdot n}{100}} = K_0 \left[\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x\right]^{\frac{p \cdot n}{100}}.$$

Der Grenzwert $\lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$ ist bekannt. Es ist $\lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x =$ e = 2,718… die Basis der natürlichen Logarithmen. Damit ergibt sich die Formel für die kontinuierliche Verzinsung

$$K = \lim_{x \to \infty} K_0 \left[\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x\right]^{\frac{p \cdot n}{100}} = K_0 \, e^{\frac{p \cdot n}{100}}.$$

Von 1 auf 2,71828

Nach dem Exkurs über die Kontinuierliche Verzinsung soll folgende Frage beantwortet werden: Welcher Zinssatz muss zugrundeliegen, damit bei einer gegebenen Anzahl von Jahren aus 1 die Zahl e =2,71828 wird? Nachfolgende Übersicht weist für ausgewählte Jahre die Ergebnisse aus:

Anzahl der Jahre	Zinssatz (%)
5	*22,14*
10	*10,52*
20	*5,13*
30	*3,39*
40	*2,53*
50	*2,02*

Verdoppelung einer Größe

Von Interesse ist die Zeit, nach der sich eine Anfangsgröße verdoppelt hat. Nachfolgend eine kleine Übersicht, der die Anzahl der Jahre und der zugehörige Zinssatz entnommen werden kann.

Anzahl der Jahre	Zinssatz (%)
5	*14,87*
10	*7,18*
15	*4,73*
20	*3,53*
25	*2,81*
30	*2,34*

Bei einem Zinssatz in Höhe von 7 % tritt die Verdoppelung nach 10,24 Jahren ein.

Die logistische Kurve

Eine Population kann sich nach unterschiedlichen Gesetzen entwickeln. Sie kann einer arithmetischen oder geometrischen Progression mit der Zeit unterliegen. Dass Wachstumsprozesse die Bäume nicht in den Himmel wachsen lassen, lässt sich mit einer logistischen (autokatalytischen) Kurve veranschaulichen. Sie verläuft S-förmig und sie beinhaltet die besondere Zahl e. Raymond Pearl und Lowell J. Reed haben diesen Kurventyp wieder entdeckt. Von Raymund Pearl wurde eine Variante 1924 zur Prognose der Bevölkerungsentwicklung eingesetzt. Die logistische Kurve oder logistische Funktion geht auf P. F. Verhulst (1804 - 1849) zurück. In diesem Kontext sei an Thomas Robert Malthus (1766 - 1834) erinnert, der sich mit Wachstumsmodellen beschäftigte. Berühmtheit erlangte seine unzutreffende Annahme, dass sich die Bevölkerung geometrisch und die Nahrungsmittelproduktion arithmetisch entwickeln.

Wahl des Maßstabs bei einer graphischen Darstellung

Bei der Darstellung von Größen steht man oft vor der Frage, welcher Maßstab zugrunde gelegt werden soll. Ein Diagramm im arithmetischen Maßstab zeigt Veränderungen absolut, ein Diagramm im logarithmischen Maßstab zeigt Veränderungen prozentual. So ist ein Preissprung um 1 € von 10 auf 11 € oder von 100 auf 101 € in einer arithmetischen Skala gleich groß, während in einer logarithmischen Skala zum Ausdruck kommt, dass der erste im Verhältnis bedeutender ist als der zweite.

Bei der Wahl eines optimalen Maßstabs sind Logarithmen unentbehrlich.

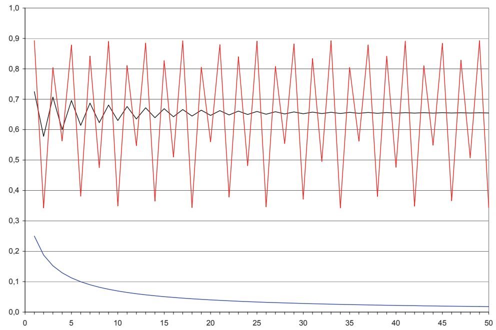
Zur graphischen Darstellung von Summenkurven sei bemerkt: Mit der Wahl eines logarithmischen Maßstabs auf der x-Achse (Abszisse) lassen sich Aussagen über Größenklassen besser ablesen.

Zinsen und eine logistische Gleichung

Ein bemerkenswertes Verhalten kann man beobachten, wenn man auf ein Sparkonto (oder eine andere Population) eine logistische Gleichung anwendet. Dabei handelt es sich um eine Variante einer einfachen linearen Gleichung. Bei ihr fließt das vorangegangene Ergebnis in das nachfolgende mit ein. Die Eigenschaften der logistischen Gleichung begann der Biologe Robert May 1976 zu untersuchen. Die logistische Gleichung spielte bei der Entwicklung der Chaostheorie eine entscheidende Rolle. Durch den Physiker Mitchell Feigenbaum rückte die Chaostheorie in ein anderes Licht. Dieser beobachtete nämlich, dass viele scheinbar nicht zusammenhängende nichtlineare Systeme sich auf bemerkenswert ähnliche Weise verhalten. Seither spricht man von den magischen „Feigenbaum-Zahlen“. Die logistische Gleichung weist einige interessante Eigenschaften auf. In Abbildung 2 wurden drei Kurvenverläufe dargestellt. Besonders interessant ist die Entwicklung der roten Kurve (a größer als 3). Die Differenzengleichung

$x_{t+1} = a\,x_t\,(1 - x_t),\ t = 0, 1, \dots$ mit einem Parameter $a \in (0,4]$ heißt logistische Gleichung, wobei a ein konstanter Veränderungsfaktor ist und x_t ein Anteil (eine Zahl zwischen 0 und 1).

Abb. 2



Logistische Gleichung für drei Kurven: a = 1 (blau), 2,9 (schwarz) und 3,57 (rot); für r wurde jeweils 0,5 gewählt.

Geometrisches Mittel

Im Zusammenhang mit dem geometrischen Wachstum und der Zinsrechnung soll das sogenannte Geometrische Mittel kurz gestreift werden. Seine Formel lautet:

$$x_G = \sqrt[n]{x_1 * x_2 * \cdots * x_n}$$

So benutzt man bei der Suche des geometrischen Mittels Logarithmen, um sich das Wurzelziehen (n>2) zu ersparen. Die Logarithmen gehören zu den elementaren Rechenverfahren eines Statistikers. Nach Cauchy's (1789 - 1857) Mittelwertsatz gilt: Das geometrische Mittel mehrerer positiver Zahlen ist kleiner als das arithmetische Mittel der Zahlen (beide Mittel sind nur dann gleich groß, wenn die Zahlen jeweils gleich sind).

$$\sqrt[n]{a_1 * a_2 * \ldots * a_n} < \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}.$$

Eine allgemeine Anmerkung zu Wachstumsraten

Bei der Berechnung von Wachstumsraten ist zu beachten, dass eine Steigerung um einen bestimmten Prozentsatz und eine darauf folgende Verringerung des Wertes um den gleichen Prozentsatz nicht den Ausgangspunkt, sondern einen geringeren Wert ergibt. So kann man beispielsweise fragen: Um wie viel muss ein Wert, der eine Einbuße um 60 % hinnehmen musste, steigen, damit wieder der ursprüngliche Wert erreicht wird? Die Antwort: 150 %.

Zum Ansparen für das Alter

Der Kapitalbedarf im Alter sollte nicht unterschätzt werden. Der nachstehenden Übersicht kann entnommen werden, wie über die Dauer der Ansparzeit der monatliche Aufwand sinkt, wenn der Zinseszinseffekt voll zum Tragen kommt.

Monatliche Sparrate um nach einer bestimmten Zeit bei einem angenommenen Zins den Betrag von 100 000 Euro zu erzielen (vorschüssig)[2]

Spardauer in Jahren	2 % Zins		4 % Zins	
	monatliche Sparrate	Gesamtaufwand	monatliche Sparrate	Gesamtaufwand
20	339	81 277	272	65 218
30	203	72 941	144	51 697
40	136	65 248	84	40 476

Entwertung einer Rente durch Inflation

Der Ausgewogenheit halber sind noch ein paar Sätze zum Inflationsrisiko fällig. Die Inflation ist der Feind der Rentner. Bei einer Inflationsrate von 2% wird die Kaufkraft nach rund 35 Jahren halbiert. Beläuft sich die Inflationsrate zum Beispiel auf 5%, dann ist die Halbierung der Kaufkraft bereits nach rund 14 Jahren eingetreten.

Zum Wesen von Zinspapieren gehört die Erfüllung des darin verbrieften Zahlungsversprechens. Der Wertbeständigkeit des Geldes gebührt der absolute Vorrang, soll das Wertpapier nicht zur Makulatur werden.

Jemand brachte einmal die Geldentwertung – feuilletonistisch überspitzt – mit der germanischen Mythologie in Verbindung. Der Drache Nidhögg nagt an den Wurzeln der Weltesche Yggdrasill. Im heutigen Sinn steht Yggdrasill für die Notenbank, deren blätterreicher Wipfel aus Banknoten besteht. Solange sie grünen, geht es den Sparern gut. Aber Nidhögg nagt an den Wurzeln und so kommt es, dass die Blätter verkümmern. Wer dieser gefährliche Nager ist, weiß man nicht so recht.

Im 18. Jahrhundert war der Begriff „inflationsindexierte Anleihen“ zwar noch nicht bekannt und dennoch wusste man sich vor Kaufkraftverlusten zu schützen, wie ein Beitrag von Hanno Beck in der *F.A.Z.* vom 8. Juni 2004 zum Ausdruck brachte. Dabei ging es um eine 1780 in Massachusetts getroffene Vereinbarung: „Gläubiger und Schuldner der Anleihe vereinbarten, dass die Höhe des Rückzahlungsbetrags sich nach dem am Tag der Rückzahlung zu ermittelnden Wert von fünf Bündeln Heu, 68 Pfund Rindfleisch, 10 Pfund Schafswolle und 16 Pfund Schuhleder richten soll.“

Heutzutage misst der Verbraucherpreisindex die durchschnittliche Preisentwicklung von Waren und Dienstleistungen, die von privaten Haushalten für Konsumzwecke gekauft werden. In Deutschland wird der Verbraucherpreisindex, wie in vielen anderen Ländern, als Laspeyres-Preisindex errechnet. Dieser geht auf den deutschen Ökonomen Étienne Laspeyres (1834 - 1913) zurück. Erwähnt seien seine Schriften *Hamburger Waarenpreis 1851 - 1863 und die californisch-australischen Goldentdeckungen seit 1848* und *Die Berechnung einer mittleren Waarenpreissteigerung* in: *Jahrbücher für Nationalökonomie und Statistik*: 3. Band. Jena 1864 bzw. 16. Band. Jena 1871.

Milton Friedman berief sich in seinem 1992 erschienen Buch *Geld regiert die Welt* auf David Hume (1711 - 1776), der in seiner Zeit schon erkannte: „Eine Ausweitung der Geldmenge bewirkt lediglich den Effekt, den Preis für Arbeit und Rohstoffe in die Höhe zu treiben.“

Sparsamkeit soll nicht zu einer Tugend der Dummen werden, wie es Robert Nef formulierte. Er nahm Bezug auf Lafontaines Fabel [Jean de La Fontaine (1621 - 1695)] von der sparsamen Ameise und der sorglosen Grille und meinte: „Man gewinnt sogar zunehmend den Eindruck, dass sich der Staat zum Anwalt der Grillen macht und sie letztlich auf Kosten der Ameisen versorgen will.“, vgl. *Tugend als Bollwerk der Freiheit* in *Finanz und Wirtschaft* vom 17. Dezember 2005.

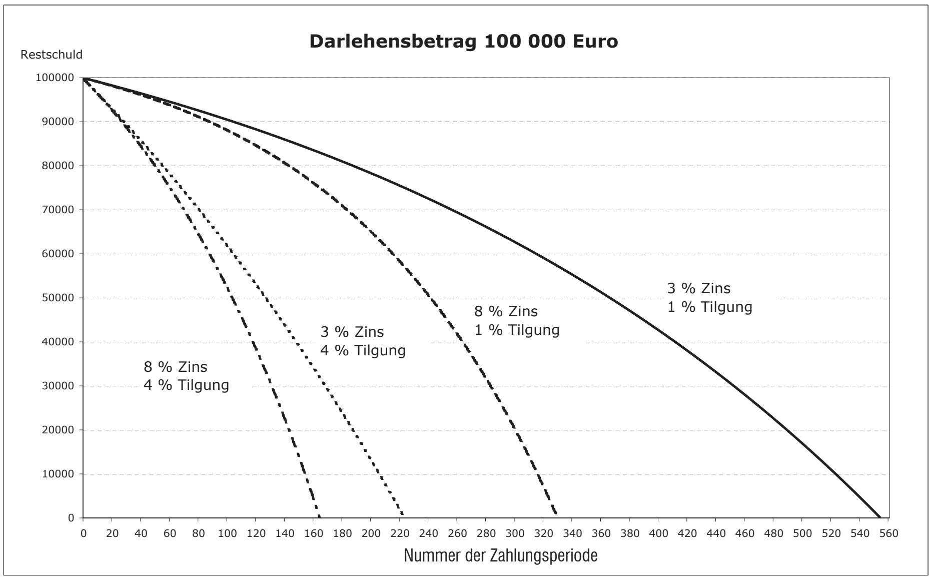
Tilgungssatz bestimmt die Tilgungsdauer

Die Hypothekenzinsen haben derzeit einen historischen Tiefstand erreicht. Das niedrige Zinsniveau hat aber seine Tücken. Niedrige Zinsen sind ein verlockendes Argument für den Erwerb einer Immobilie. Sie sollten aber bei einer Kreditaufnahme nicht den Ausschlag geben. Bei der Rückzahlung eines Darlehens ist die Dauer der Tilgung von Bedeutung, auch bei einem niedrigen Zinssatz, wie folgende Beispiele und Abb. 3 zeigen (nachschüssige Berechnung).

Höhe des Darlehens Euro	Zinssatz %	Tilgungssatz %	Monatlicher Ratenbetrag Euro	Dauer der Tilgung Monate	Gesamtaufwand Euro
100 000	3%	1%	333,33	555,21	185 068
100 000	3%	3%	500,00	277,61	138 805
100 000	3%	4%	583,33	224,13	130 742
100 000	5%	1%	500,00	430,92	215 460
100 000	5%	4%	750,00	195,03	146 273
100 000	8%	1%	750,00	330,68	248 010
100 000	8%	4%	1 000,00	165,34	165 340

2 Zahlen jeweils gerundet.

Abb. 3



Tilgungsdauer eines Darlehens in Höhe von 100 000 Euro bei einem bzw. vier Prozent Tilgung und ausgewählten Zinssätzen.

Annuitäten-Darlehen mit einem niedrigen Zins laufen wesentlich länger bis zur Tilgung als solche mit einem höheren Zins. Mit jeder Ratenzahlung nimmt die Tilgung etwas zu, während der Zinsaufwand etwas abnimmt. Je niedriger der Darlehenszins ist, umso kleiner fällt die Zinsersparnis aus.

Zur Tilgung der öffentlichen Schulden

In ihrer Ausgabe vom 7. Januar 2005 versah die *F.A.Z.* einen Beitrag mit dem Titel *Jede Sekunde 2660 Euro mehr*. Diese Meldung bezog sich auf die Staatsverschuldung. Zitiert wurde der Steuerzahlerbund: „Gesetzt den Fall, von sofort an würden keinerlei neue Schulden mehr aufgenommen und die öffentliche Hand würde gesetzlich verpflichtet, jeden Monat eine Milliarde Euro Schulden zu tilgen, so würde dieser Prozeß nach Berechnungen des Steuerzahlerbundes mehr als 117 Jahre andauern müssen, um den Schuldenberg vollständig abzutragen.“ Das ist sehr einfach gerechnet.

Man könnte zum Beispiel folgende Frage formulieren: Wie lange dauert der Schuldenabbau von damals 1415 Milliarden Euro bei einem Zinssatz von 4% und einer Tilgung von 1 bzw. 3%? Bei einer Tilgung von einem Prozent müssten monatlich 5,9 Milliarden Euro getilgt werden und das rund 484 Monate (rund 40 Jahre) lang; bei drei Prozent Tilgung ergeben sich folgende Zahlen: monatliche Tilgung von 8,25 Milliarden Euro für rund 255 Monate (etwa 21 Jahre).

Angesichts der demographischen Entwicklung stehen in der Zukunft gewaltige Verbindlichkeiten ins Haus. Rechnet man zum damaligen Schuldenstand (1,4 Billionen Euro) die Anwartschaften in den Sozialversicherungen (5,7 Billionen) hinzu, so beläuft sich dieses Ergebnis auf 7,1 Billionen Euro, vgl. die Rede von Bundespräsident Köhler beim Arbeitgeberforum *Wirtschaft und Gesellschaft* in Berlin am 15. März 2005. Erinnert sei an dieser Stelle an Cicero (106 - 43 v. Chr.), der schon vor 2000 Jahren meinte: „Die Menschen sehen nicht ein, welch große Einnahmequelle die Sparsamkeit ist.“, vgl. *Paradoxa Stoicorum* 49.

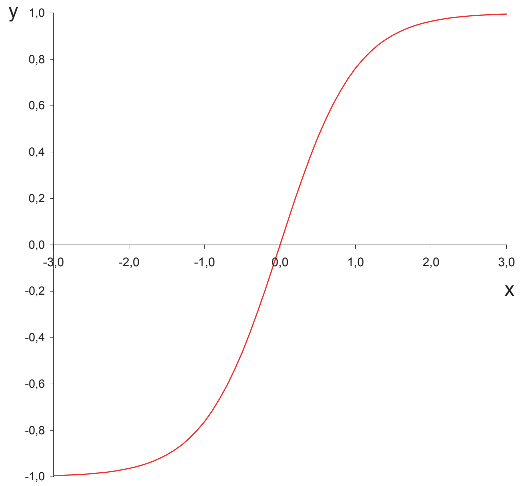
Eine hyperbolische Kurve für den Steuertarif

Die Nützlichkeit der Zahl e zeigt sich beispielsweise auch bei der Lösung des berühmten Problems der hängenden Kette oder beim Problem der „Vertauschten Briefe“. Sie könnte auch bei einem immer wieder diskutierten Thema, nämlich dem Steuertarif, hilfreich sein.

Es besteuert der Steuerstaat, auf dass er besser Steuern kann!? Schon Albert Einstein (1879 - 1955) soll sich folgendermaßen geäußert haben: „Um eine Steuererklärung abgeben zu können, muss man ein Philosoph sein. Für einen Mathematiker ist es zu schwierig.“ Hans-Adam II, Fürst von und zu Liechtenstein, meint: „Wo es Steueroasen gibt, muss es auch Steuerwüsten geben.“

Die „Steuererklärung auf dem Bierdeckel“ (Friedrich Merz) ist nicht in Sicht. Wie auch immer: Geeignet erscheint der tangens hyperbolicus (Hyperbeltangens), siehe Abbildung 4. Die Hyperbelfunktionen entstehen durch rationale Verbindungen

Abb. 4



Der Hyperbeltangens (Tangens hyberbolicus): y = tanh x. Der Bereich der Werte ist beschränkt, es gilt -1 < y < +1.

der natürlichen Exponentialfunktionen e^x und e^{-x}. Einen Vorschlag zur Steuervereinfachung gab Harald Fritzsch mit seinem Beitrag *Statt Steuertabellen eine mathematische Formel* in der *SZ* vom 25. Februar 1987 ab. Danach sollte die Steuerrate eine möglichst stetige Funktion des Einkommens sein, die von einem gewissen Anfangswert langsam ansteigt, wobei der Spitzensteuersatz letztlich nur angesteuert, aber nie ganz erreicht wird (asymptotischer Wert). Eine solche Funktion gibt es unter den elementaren mathematischen Funktionen, nämlich den sogenannten tangens hyperbolicus (tanh). Dessen Verwendung hätte für den Steuertarif nicht nur den psychologisch wichtigen Effekt der Glättung der Steuerkurve zur Folge, und damit den Wegfall des Mythos, den der Spitzensteuersatz heute besitzt, so die Ausführungen von Harald Fritzsch.

Literaturnachweis

Cicero, Marcus Tullius: De legibus = Über die Gesetze. Paradoxa stoicorum = Stoische Paradoxien. Lateinisch und deutsch / M. Tullius Cicero. Hrsg., übers. und erl. von Rainer Nickel. München; Zürich 1994.

Euler, Leonhard: Leonhard Eulers Einleitung in die Analysis des Unendlichen / aus dem Latein. übers. und mit Anm. und Zusätzen begleitet von Johann Andreas Christian Michelsen. 1. Buch, Berlin 1788.

Jursa, Michael: Die Babylonier: Geschichte, Gesellschaft, Kultur. München 2004.

Leibniz, Gottfried Wilhelm: Hauptschriften zur Versicherungs- und Finanzmathematik / Gottfried Wilhelm Leibniz. Hrsg. von Eberhard Knobloch …Berlin 2000.

Pacioli, Luca: Abhandlung über die Buchhaltung 1494. Nach dem italienischen Original von 1494 ins Deutsche übersetzt und mit einer Einleitung über die Italienische Buchhaltung im 14. und 15. Jahrhundert und Paciolis Leben und Werk versehen von Balduin Penndorf. Stuttgart 1933.

Stevin, Simon: De Thiende. Das erste Lehrbuch d. Dezimalbruchrechnung nach der holländischen und der französischen Ausgabe von 1585. Übers. und erl. von Helmuth Gericke und Kurt Vogel. Frankfurt a. M. 1965.