Historischer Abriss ausgewählter Rechentechniken

Helmut Hirtz

Voraussetzung für eine angemessene Bewertung von Leibrenten war eine fortgeschrittene Mathematik. In der Lebensversicherung, die sich aus dem mittelalterlichen Leibrentengeschäft entwickelte, hat die Mathematik schon immer eine wichtige Rolle gespielt.
So bemerkte Gottfried Wilhelm Leibniz (1646 - 1716) im Rahmen seiner Zinseszinsrechnungen: „Für höhere Potenzen werden wir Logarithmen zur Anwendung bringen, …“ (Leibniz 2000, S. 201).
Die historische Entwicklung bestimmter Rechentechniken soll dieser Beitrag in gedrängter Form aufzeigen. Eigens behandelt wird der historische Verlauf der Rechenmaschinen.
Im Abendland machte die Technik des Zahlenrechnens einen Fortschritt mit der Anwendung des heutzutage benutzten dezimalen Positions- oder Stellenwertsystems. Es geht auf die Inder zurück und kam über die Araber nach Europa (über Spanien und Italien).
Die negativen Zahlen fassten in Europa deshalb spät Fuß, weil die Araber – die Brücke zwischen Indien und Europa – sie ablehnten. Eine Anerkennung fanden die negativen Zahlen im 16. Jahrhundert durch Michael Stifel und Simon Stevin. Aber erst 1867 wurden die ganzen Zahlen endgültig in die Mathematik durch Hermann Hankel (1839 - 1873) eingebunden. Dem Dionysius Exiguus kann man nicht vorwerfen, dass er im 6. Jahrhundert bei seiner Zeitrechnung die Null nicht berücksichtigt hatte, weil sie damals in Europa noch unbekannt war. Heute sind jedermann die rechtwinkligen oder kartesischen Koordinaten vertraut. Nur weil die beiden Achsen mit Null beginnen, wurde diese Entdeckung ein Erfolg. Der Verfasser des ersten gedruckten Werkes über Dezimalbrüche in Europa (1585) ist Simon Stevin.
Während im 16. Jahrhundert das Erlernen der Bruchrechnung nur an den Hohen Schulen in Italien möglich war, findet man bei dem deutschen Theologen und Mathematiker Michael Stifel (1487 - 1567) schon das numerische Radizieren bis zur 7. Wurzel; heute benutzt man dazu Logarithmen.
Sternwarten waren neben den Klöstern und Domschulen Stätten des Wissens. Die rechnerische Bearbeitung der Proportionen und der Kalkül des Dreisatzes erfolgten in Europa vom 15. bis zum 16. Jahrhundert, vor allem im Zusammenhang mit dem kaufmännischen Rechnen. Sie waren hauptsächlich Lehrgegenstand der Rechenmeister und Cossisten. In Deutschland ist vor allem Adam Ries(e) (1492 - 1559) bekannt geworden. Die neuzeitliche Mathematik (etwa ab 1500) wurde bei ihrer Entfaltung wesentlich von außen her angeregt.
Durch gestiegene Ansprüche an die Rechenverfahren fand die Prosthaphaerese Eingang in die Praxis. Dieses System wurde durch das Rechnen mit Logarithmen verdrängt.
Die Schaffung der Logarithmen, die aus praktischen Gründen entstanden, war eine herausragende Erfindung des christlichen Abendlands. Die Zahl e, die Basis der natürlichen Logarithmen,

beeinflusste nicht nur die Zinseszins-, Renten- und die Wahrscheinlichkeitsrechnung. Diese Zahl findet sich auch im Gompertz'schen Gesetz, das dem Verlauf der Sterblichkeit im hohen Alter näherungsweise entspricht. Der Nutzen dieser besonderen Zahl zeigte sich zum Beispiel bei der Lösung des berühmten Problems der hängenden Kette oder beim Problem der vertauschten Briefe. Hilfreich könnte sie beim immer wieder diskutierten Thema Steuertarif sein. Diese merkwürdige Zahl ist in der gesamten Mathematik sehr wichtig. Während die Geschichte der Zahl π (Pi) weit in die Vergangenheit zurückreicht, ist die Zahl e noch relativ „jung".
Eine besondere Entdeckung war die Relation $e^{i\pi} = -1$ (heutige Schreibweise), die fünf Basisgrößen der Mathematik (π, e, i, 0 und 1) miteinander verbindet. Diese Formel geht auf Leonhard Euler (1707 - 1783) zurück, der sie allerdings in einer anderen Form darstellte. Zuerst wurde diese Formel 1714 in logarithmierter Form von Roger Cotes (1682 - 1716) veröffentlicht. Es ist erwähnenswert, dass bei der unendlichen Menge der reellen Zahlen nur ganz wenige Einheiten auf dem Zahlenstrahl genügen, um die wichtigsten Zahlen der Mathematik darzustellen (0, 1, $\sqrt{2} \approx 1{,}41$ [die Länge der Diagonalen in einem Quadrat der Seitenlänge 1[1]]), der „Goldene Schnitt" $\approx 1{,}618$, die Zahl e $\approx 2{,}718$ und Pi (π) $\approx 3{,}14$.
„Die ersten bekannten Rechenmethodiker, die Zahlenbilder im Rechenunterricht verwendeten, waren Basedow[2] und Busse." (Willi Schön in seiner Schrift *Das Schaubild*: *Eine Systematik der Darstellungsmöglichkeiten*). Auf die genannten folgten dann im Laufe des 19. und 20. Jahrhunderts ungezählte „Erfinder" von „neuen" Zahlbildern, wie Schön weiter ausführte.
Abgeschlossen wird dieser Beitrag mit einem kurzen Streifzug in die Ausgleichsrechnung, wobei den Spline-Funktionen eine besondere Beachtung zukommt. Ein Ausgleich-Spline eignet sich in hervorragender Weise zum Glätten der rohen Sterbewahrscheinlichkeiten. Mit diesen lässt sich die sog. Absterbeordnung (Anzahl der Überlebenden) aufzeigen, eine wichtige Grundlage für die Bewertung von Leibrenten.

Mathema – das Gelernte: Lehre, Wissenschaft.
Dass sich der Mensch schon immer Gedanken über seine Umwelt machte, zeigt sich deutlich auf dem Gebiet der Astronomie. „Feststeht, dass in Babylonien von 750 bis 50 vor Chr. – vielleicht sogar bis ins erste Jahrhundert nach Chr. – systematisch Astronomie getrieben und dabei eine Fülle von Beobachtungsdaten aufgezeichnet wurde.", vgl. F. Richard Stephenson: Historische Finsternisse – eine astronomische Fundgrube. In: Spektrum der Wissenschaft 12/1982.

Zu einem neuen Weltbild sei festgehalten: Nikolaus Kopernikus (1473 - 1543) hatte gelehrt, dass die Planeten um die Sonne wandern. Johannes Kepler (1571 - 1630) zeigte, wie sie dies tun. Isaac Newton (1643 - 1727) gab dem Werk den letzten Schliff, indem er erklärte, warum alles so und nicht anders sein könne, durch sein Gravitationsgesetz. Giordano Bruno (1548 - 1600) verkündete 1584 die räumliche Unbegrenztheit des Weltalls.

Mit dem Lauf der Gestirne beschäftigte sich schon im 4. Jahrhundert vor Christus Herakleides Pontikos, Schüler Platons. Ihm war die tägliche Achsendrehung der Erde bekannt und er soll schon das heliozentrische System gelehrt haben. Aristarchos von Samos, der im dritten Jahrhundert vor Christus lebte, verfocht das heliozentrische Weltbild. In der Schrift *naturales questiones* (VII 2,3) von Seneca (gest. 65) ist zu lesen: „Es wird auch gut sein, das zu erforschen, um zu wissen, ob sich der Himmel um die feststehende Erde dreht oder die Erde sich dreht und der Himmel feststeht."

1 Oder die Länge der Hypotenuse in einem rechtwinkligen Dreieck, dessen Katheten jeweils die Länge 1 aufweisen.
2 Vermutlich der Erzieher Johannes Bernhard Basedow (1723 - 1790), der zusammen mit anderen den Philanthropismus vertrat.

Die Geschichte mit dem fallendem Apfel brachte Carl F. Gauß durch seinen erheiternden Kommentar auf den Punkt: „Die Geschichte mit dem Apfel ist zu einfältig, ob der Apfel fiel oder es bleiben ließ, wie kann man glauben, dass dadurch eine solche Entdeckung verzögert oder beschleunigt wäre, aber die Begebenheit ist gewiss folgende. Es kam ein Mal zu dem Newton irgendein dummer, zudringlicher Mensch, der ihn befragte, wie er zu seinen großen Entdeckungen gekommen sei. Da aber Newton sich überzeugte, was für ein Geisteskind er vor sich habe, und er den Menschen los sein wollte, habe er geantwortet, es sei ihm ein Apfel auf die Nase gefallen, was auch jenem, der befriedigt von dannen ging, vollkommen einleuchtete." (zitiert nach W. Sartorius von Waltershausen)[3].

„Mathematik und Logik sind wohl die einzigen wirklichen ‚Geisteswissenschaften', und ohne sie wären die exakten Naturwissenschaften kaum denkbar." So drückte es der Nobelpreisträger für Physik 1989, Wolfgang Paul, in einem Interview aus; vgl. SZ vom 17./18. März 1990.

Carl Friedrich Gauß (1777 - 1855) hielt die Mathematik, um seine eigenen Worte zu gebrauchen, für die Königin der Wissenschaften und die Arithmetik für die Königin der Mathematik. Diese lasse sich dann öfter herab, der Astronomie und anderen Naturwissenschaften einen Dienst zu erweisen, doch gebühre ihr unter allen Verhältnissen der erste Rang. W. Sartorius von Waltershausen übermittelte uns diese Aussage von Gauß, dem „Meister der drei großen A": Arithmetik, Algebra und Analysis.

Das griechische Wort mathema (τὸ μάθημα) bedeutet „das Gelernte: Lehre; Wissenschaft".

Der bedeutende englische Philosoph Bertrand Russel (1872 - 1970) hat in einem Rundfunkvortrag einmal die Frage aufgeworfen, was der wesentliche Beitrag Europas zur geistigen Entwicklung der Menschheit sei. Russel beantwortete die selbst gestellte Frage wie folgt: „Religion gibt es überall, nicht nur in Europa, Kunst und Kultur gibt es überall, nicht nur in Europa. Es ist die Idee der Wissenschaft, die Europa der Welt gebracht hat. Platon und Aristoteles sind es gewesen, die die Idee der Wissenschaft als Wissenschaft entwickelt haben, und es ist ohne Zweifel Sokrates gewesen, der mit seinen bis dahin unerhörten Fragen nach dem ‚was ist dies?' und mit seinem bis dahin unerhörten Forschen nach der logischen Begründung jeder Aussage diesen Weg eröffnet hat." (siehe den Beitrag *Die Idee der Wissenschaft: Das Erbe der Griechen in Europa und der Türkei* von Prof. Dr. Hartmut Wedekind in der F.A.Z. vom 19.4.2003).

Cicero äußert sich in seiner Schrift *Tusculanae disputationes* (Gespräche in Tusculum) so: „Griechenland übertraf uns an Gelehrsamkeit und jeder Art von Literatur;" (I 1,3).

An anderer Stelle beurteilt Cicero die Griechen wie folgt: „In höchstem Ansehen stand bei ihnen [Griechen] die Geometrie; deshalb gab es nichts Erlauchteres als Mathematiker; wir hingegen haben das Maß dieser Kunst auf den Nutzen, den wir beim Messen und Rechnen von ihr haben, beschränkt.", vgl. *Tusc. disp*. I 2,5.

Cicero entdeckte bei seinem Aufenthalt in Sizilien im Jahr 75 v. Chr. das in Vergessenheit geratene Grab des Archimedes (287 - 212 v. Chr.), dem bedeutendsten Mathematiker des Altertums. Hierzu schreibt Cicero u.a.: „Als Quästor habe ich sein Grab, das die Syrakusaner nicht kannten und das, wie sie behaupteten, überhaupt nicht mehr existiere, aufgespürt;". „So hätte die edelste und einst auch die gelehrteste Stadt Griechenlands das Grabmahl ihres einzig scharfsinnigen Mitbürgers nicht gekannt, wenn sie es nicht von einem Mann aus Arpinum [Ciceros Geburtsort] erfahren hätte."; vgl. *Tusc. disp.* V 64 und 66.

In seinem Dialog *De oratore* (Über den Redner, I 10) schreibt Cicero: „Wer wüsste nicht, wie dunkel das Gebiet der Mathematiker ist, wie entlegen, kompliziert und heikel die Wissenschaft, mit der sie sich beschäftigen?"

Nicht fehlen soll hier eine Äußerung von Carl Friedrich Gauß, die wir W. Sartorius von Waltershausen verdanken: „Gauß hat sich öfter gegen uns geäußert, dass Archimedes der Mann des Altertums gewesen sei, den er am höchsten schätze, er denke sich ihn als einen durchaus edel aussehenden würdigen Greis, nur könne er ihm nicht verzeihen, dass er bei seiner Sandrechnung das decadische Zahlensystem nicht gefunden habe. ‚Wie konnte er das übersehen,' sagte er bewegt, ‚und auf welcher Höhe würde sich jetzt die Wissenschaft befinden, wenn Archimedes jene Entdeckung gemacht hätte.' "

Der Mathematikhistoriker Florian Cajori (1859 - 1930) hielt drei Erfindungen ausschlaggebend für die wunderbaren Kräf-

3 Gauß nannte den englischen Forscher „Summus Newton". Diesen Beinamen gab Gauß auch Leonhard Euler.

te des modernen Rechnens: die arabische [indisch-arabische] Schreibweise, die Dezimalbrüche und die Logarithmen.

Algoritmi dicit (Algorithmi sagt)

Al-Hwârizmî (al-Chwarismi, gest. um 850) erläuterte das indische Zahlensystem und das Rechnen in diesem System. Die Namen „Algebra" und „Algorithmus" gehen auf sein Wirken zurück. Algoritmi dicit (Algorithmi sagt) heißt es in einem seiner Werke. Er lebte am Hof des Abbasidenkalifen al-Mamun (813 - 833). Dieser gründete 830 in Bagdad das „Haus der Weisheit", um wissenschaftliche Werke aus dem Griechischen ins Arabische übersetzen zu lassen. Al-Mamun war der Sohn von Harun al-Raschid, der prächtige Bauten schuf und Wissenschaft und Kunst förderte; in „Tausendundeine Nacht" wird er übrigens viel genannt.

Hingewiesen sei auf „Mohammed Ibn Musa Alchwarizmi's Algorismus: das früheste Lehrbuch zum Rechnen mit indischen Ziffern" / nach der einzigen (lat.) Handschrift (Cambridge Un. Lib. Ms. I i. 6.5) in Faksimile mit Transkription und Kommentar von Kurt Vogel.

Im 9. Jahrhundert entstand eine arabische Ausgabe des Euklid. Im Jahr 1482 erschienen die *Elemente* Euklid's zum ersten Mal in der venetianischen Filiale des Augsburger Druckers Erhard Ratdolt. Sie sind nach der Bibel, das Buch mit den meisten Auflagen.

Ein Mathematiker auf dem Stuhl Petri

Leibniz bemerkt in seiner *Explication de L'Aritmètique Binaire* (Erklärung der binären Arithmetik) aus dem Jahr 1703, S. 89: „Europa verdankt die Einführung dieser Arithmetik wahrscheinlich Gerbert, der unter dem Namen Sylvester II. Papst wurde und der sie von den Mauren Spaniens übernahm." (In das Deutsche übertragen von Dr. Rudolf Soellner, München); vgl. Herrn von Leibniz' Rechnung mit Null und Eins / Siemens AG. Berlin, München 1966.

Gerbert von Aurillac war ein brillanter Gelehrter und Neuerer, der arabische Wissenschaften kennengelernt hatte. Seine Kenntnisse auf dem Gebiet der Naturwissenschaft und Mathematik brachten ihm den Ruf des Zauberers ein. Der von Otto III. 999 zum Papst ernannte Gerbert verstarb 1003. Die europäischen Rechner benutzten den Abakus des Gerbert und seiner Schüler – ein Abakus eines neuen Typs (neun indisch-arabische Ziffern ohne die dazugehörige Null), vgl. Georges Ifrah.

Der Stauferkaiser Friedrich II.

Friedrich II. (1194 - 1250) schuf in seinem sizilianischen Erbreich den ersten modernen Beamtenstaat. In Palermo hielt der Stauferkaiser seinen glänzenden Hof. Der Kaiser, ein Förderer der Wirtschaft und Kultur, gründete 1224 in Neapel eine Universität. Der hoch gebildete Kaiser beschäftigte sich auch mit antiker und arabischer Philosophie und Naturlehre. Der Hof zu Palermo galt damals als Zentrum des Geisteslebens. Friedrich II. suchte den Ausgleich und den geistigen Austausch mit der arabisch-islamischen Welt. Mit seinem Tod (1250) brach die Staufermacht zusammen.

Am Rande sei erwähnt, dass dessen Großvater Friedrich I. (Barbarossa) 1180 Pfalzgraf Otto von Wittelsbach das Herzogsschwert überreichte. Damit nahm die mehr als 700-jährige Herrschaft der Wittelsbacher über Bayern (bis 1918) ihren Anfang. Unter Herzog Ludwig I. (reg. 1183 - 1231) wurde das bayerische Territorium im Norden und Osten weiter ausgebaut. Als dessen Sohn Otto II. im Jahr 1253 starb, war Bayern das größte Territorialherzogtum im Deutschen Reich.

Bible moralisée: Der Weltenschöpfer

An dieser Stelle soll die Rede von einer der prächtigsten gotischen Handschriften sein, nämlich der *Bible moralisée*, die im 13. Jahrhundert angefertigt wurde. In *Glanzlichter der Buchkunst* (Band 2) heißt es hierzu:

"Von den vielen Miniaturen der Bible moralisée Cod. 2554 der Österreichischen Nationalbibliothek in Wien (ÖNB) ist eine einzige wirklich berühmt geworden: die einleitende, ganzseitige Darstellung des Weltenschöpfers (1 = fol. lv).", siehe Abbildung 1. „In einem Bild ist hier die Erschaffung von Himmel, Erde, Sonne, Mond und allen Elementen – so die Beschriftung – zusammengefasst, und die Darstellung des ausschreitenden Schöpfergottes, der den Kosmos gleichsam vor sich herrollt, sich über ihn beugt und ihn mit dem Zirkel messend formt, hat nicht nur wegen ihrer Eindruckskraft die Aufmerksamkeit auf sich gezogen, sondern auch, weil sie wie kaum ein anderes Bild die Bedeutung des Messens und der Proportion im hohen Mittelalter zu veranschaulichen hilft. Entstanden ungefähr gleichzeitig wie die großen hochgotischen Kathedralen der Ile-de-France und im gleichen nordfranzösischen Bereich, schien die Miniatur jene Anschauungen zu erhellen, von denen die gotische Kathedrale geprägt wurde. 'Gott als Architekt des Universums', so lautete die Bildunterschrift, als die Miniatur in einem Werk über die gotische Kathedrale abgebildet wurde."

Abb. 1

Bible moralisée: Der Weltenschöpfer. Aus: Benoît B. Mandelbrot: Die fraktale Geometrie der Natur. Basel 1987.

Das besprochene Motiv aus *Bible moralisée* nahm Mandelbrot in sein Buch *Die fraktale Geometrie der Natur* auf. Für ihn liefert sie ein Beispiel dafür, dass schon in alten Kunstwerken die fraktale Geometrie eine Rolle spielte. Mandelbrot nennt noch zwei weitere Beispiele: *Die Sintflut* von Leonardo da Vinci (1452 - 1519) und *Die Woge* von Katsushika Hokusai (1760 - 1849). Die sog. Fraktale fanden erst im 20. Jahrhundert Eingang in die Forschung. Den Begriff „Fraktal“ prägte Benoît Mandelbrot (geb. 1924) nach dem lateinischen Verb „frangere“ (brechen) und er begründete in den 70er Jahren des 20. Jahrhunderts die fraktale Geometrie als mathematisches Forschungsgebiet (Theorie komplexer geometrischer Formen, die mit den euklidischen Methoden nicht zu analysieren und zu klassifizieren sind). Ein bekanntes Beispiel für ein Fraktal ist die Mandelbrot-Menge („Apfelmännchen“). Auf Fraktale trifft man überall in der Natur.

Erste abendländische Algorithmiker zu Beginn des 13. Jahrhunderts: Fibanoacci und Sacrobosco

Der älteste abendländische Algorithmiker ist Leonardo von Pisa (geb. etwa 1180, gest. nach 1240), genannt Fibonacci. Von ihm stammt die erste Einführung in das indische Zahlenrechnen. Um das Jahr 1202 erschien seine bedeutende Einführung in die neue Zahlenrechnung mit zahlentheoretischen Beiträgen unter dem Titel *Liber abbaci* [Zu verstehen als „Buch der Rechenkunst“]. Eine größere Verbreitung erlangte sein zweites Buch, das 1228 veröffentlicht wurde. Er disputierte am Hofe Kaiser Friedrichs II. über mathematische Themen. Ein finanzielles Problem hielt er für lösbar, wenn der Begriff Schulden akzeptiert wird. Dennoch dauerte es noch Jahrhunderte bis sich negative Zahlen durchgesetzt haben.

Das erste Kapitel dieser Schrift beginnt mit: „Novem figure indorum he sunt 9 8 7 6 5 4 3 2 1. Cum his itaque novem figuris, et cum hoc signo 0, quod arabice cephirum appelatur, scribitur quilibet numerus...“ (Die neun Figuren der Inder sind diese: 9,8,7,6,5,4,3,2,1. Mit diesen neun Figuren und mit diesem Zeichen 0, was arabisch cephirum heißt, wird jede beliebige Zahl geschrieben). Erinnert sei an das Wort Figure im Englischen, das Ziffer bedeutet.

Das erste weit verbreitete Universitätslehrbuch über die Darstellung der Zahlen in indischen Ziffern und das Rechnen mit ihnen war *Algorismus vulgaris* von Johannes de Sacrobosco, der um 1236 in Paris verstarb; vgl. Gericke, Helmuth: Mathematik im Abendland. In seinem Werk *Tractatus de sphaera* diskutierte Sacrobosco über die Gestalt der Welt. So sagt Sacrobosco (zitiert nach Helmuth Gericke): „Dass der Himmel rund ist, hat einen dreifachen Grund: Ähnlichkeit (similitudo), Zweckmäßigkeit (commoditas) und Notwendigkeit (necessitas)“.

Allmähliche Verbreitung der neuen Ziffern

Die neun Figuren der Inder (die Ziffern von 1 bis 9) und cephirum (die Null) haben sich in Europa nur langsam verbreitet. Bemerkenswert ist das Verbot der neuen Ziffern im Jahr 1299 durch die Florentiner Wechslerzunft, die an den römischen Zahlzeichen festhielt. Mancher behauptete, weil sie der neuen Rechentechnik nicht mächtig war.

Das Hauptbuch der Firma Averado de Medici e Compagni vom Jahr 1395 wurde in zwei Währungen geführt: die Pisaer fiorini (fl.) sind in römischen Ziffern geschrieben, während die Florentiner Währung in arabischen Ziffern [indisch-arabisch] ausgewiesen wird.

Das Ringen der Rechensysteme (auf den Linien und mit der Feder) illustriert eindrucksvoll eine allegorische Darstellung der Arithmetik aus dem Jahr 1503 in dem Werk *Margarita philosophica* des Freiburger Kartäusers Gregor Reisch (1470 - 1525): Der Abakusrechner sitzt griesgrämig beim Rechnen, während der Algorithmiker bereits fertig ist.

Die herkömmliche Rechentechnik beschreibt der Titel der Schrift *Abacus atque vetustissima veterum Latinorum per digitos manusque* … (Das Rechenbrett und der älteste Gebrauch der Lateiner mit Fingern und Händen zu rechnen) deutlich. Dieses Werk von Beda (um 673 - 735), genannt „Venerabilis", gab der bayerische Geschichtsschreiber Johannes Aventinus 1532 heraus.

Beda stellte in seiner Schrift *De ratione temporum* (Über die Berechnung der Zeit) ein Verfahren der Fingerrechnung zur Bestimmung des Osterfestes nach dem Julianischen Kalender vor. Hierbei spielten u.a. der 28-jährige Sonnenzyklus und der 19-jährige Mondzyklus eine wesentliche Rolle.

Schließlich sei noch das Lateinische „Tui digiti" genannt, das „deine Rechenfertigkeit" bedeutet *Der kleine Stowasser*.

Einen Einblick in die tägliche Praxis des Rechnens im alten Rom vermitteln zum Beispiel das Testament des römischen Kaisers Augustus sowie die Verhältnis-Angaben der damals bekannten drei Weltteile. Die von Horaz stammende Szene aus dem Schulunterricht wurde an anderer Stelle bereits geschildert.

Vom Testament des Augustus berichtete Sueton. „Als ersten Erben bestimmte er Tiberius mit der Hälfte und einem Sechstel, Livia mit einem Drittel, die auch beide seinen Namen tragen sollten. Als Erben zweiten Grades setzte er Drusus ein, den Sohn des Tiberius, mit einem Drittel des noch verbleibenden letzten Zwölftels, und Germanicus und seine Söhne mit den restlichen Teilen. (…)", vgl. Sueton, *Augustus* 101,2. Formelmäßig: 1. Grad: 1/2 + 1/12 + 1/3 = 11/12 und 2. Grad: 1/36 + 2/36 = 1/12.

Bemerkenswert ist der Bericht von Plinius d. Ä. zu den damals bekannten drei Erdteilen. „dass Europa um etwas weniger als die Hälfte Asiens größer als Asien ist, um das Doppelte aber und den sechsten Teil von Afrika größer als Afrika. Zählt man alle diese Werte zusammen, so wird völlig offenbar werden, dass Europa den dritten und etwas mehr als den achten Teil der ganzen Erde ausmacht, Asien aber den vierten und vierzehnten, Afrika jedoch den fünften und den sechzigsten." *(Nat. hist.* I. VI, 210). In Zahlen ausgedrückt (heutige Schreibweise):
(1/3 + 1/8) + (1/4 + 1/14) + (1/5 + 1/60) = 1 oder in Prozent: 46 + 32 + 22.

Es ist erwähnenswert, dass im ehemaligen Benediktinerkloster Reichenbach am Regen bereits im 14. Jahrhundert die damals noch ungewohnten indisch-arabischen Ziffern angewandt wurden; vgl. Wolfgang Kaunzner, S. 26.

Über das Rechnen mit dem Abakus
Simon Jakob (gest. 1564) schrieb über das Rechnen mit dem Abakus (zit. n. Dédron / Itard 1959, 286):
„Es trifft zu, dass er bei Rechnungen im Haushalt von einigem Vorteil erscheint, wo man oft summieren, abziehen und hinzufügen muss, aber in der hohen Kunst des Rechnens ist er sehr oft hinderlich. Ich behaupte nicht, dass man auf den Linien [des Abakus] diese Rechnungen nicht anstellen kann, aber den Vorteil, den ein freier Wanderer ohne Lasten gegenüber einem schwer bepackten hat, den hat auch die Rechnung mit Zahlen gegenüber der Rechnung mit Linien."; vgl. Ifrah, Georges: Universalgeschichte der Zahlen. Frankfurt/Main; New York 1991, S. 148.

Alfons X. veranlasste neue astronomische Tafeln
Ferdinand III. (1199 - 1252) erneuerte die von seinem Vater Alfons IX. 1218 gegründete Universität Salamanca, die vom 13. bis 16. Jahrhundert zu den vier bedeutendsten Universitäten des Abendlandes zählte. Sein Sohn Alfons X. (1226 - 1284), der gelehrteste Fürst des Mittelalters, förderte Dichtung, Gesetzessammlung, Himmelskunde und Geschichtsschreibung. Alfons X. wurde auch der Weise genannt und war König von Kastilien und León (1252 - 1282). Als Enkel Philipp's von Schwaben, dem jüngsten Sohn von Kaiser Friedrich I. wurde er 1257 zum deutschen König gewählt, kam aber nie nach Deutschland.

Als Alfons X. 1252 seinem Vater, Ferdinand III., auf dem Thron folgte, wurden ihm die auf sein Betreiben hin erstellten astronomischen Tafeln mit Angaben über die sichtbaren Bewegungen der Sonne, des Mondes und der Planeten übergeben. Diese nach ihm benannten „Alfonsinischen Tafeln" übertrafen die Ptolemäischen aus dem 2. Jahrhundert deutlich und waren bis Kopernikus (1473 - 1543) in Gebrauch. Ihnen folgten 1551 die Prutenischen Tafeln, die später durch die Rudolphinischen Tafeln verdrängt wurden.

Der Astronom und Mathematiker Rudolf Wolf (1816 - 1893) berichtete Details über die von Alfons einberufene Kommission. Diese versammelte sich zu Toledo, das kurz zuvor die Herrschaft der Araber abgeworfen hatte. Unter dem Präsidium des Juden Isaac Aben Said, genannt Hassan, gehörten der

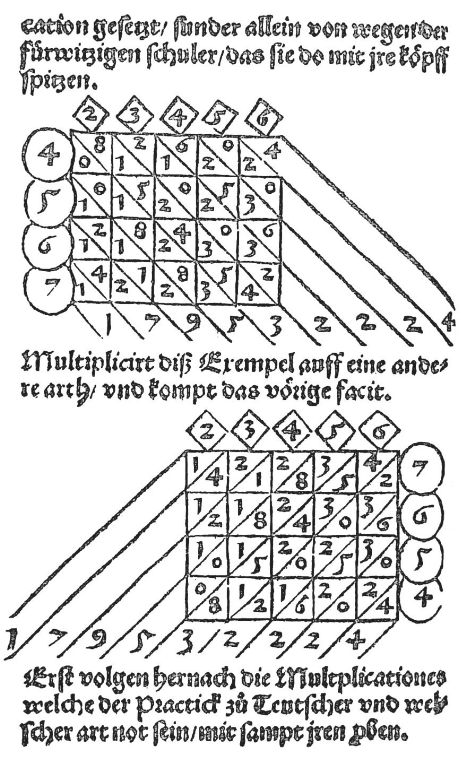
Kommission fünfzig arabische, jüdische und christliche Gelehrte an. Für dieses Projekt soll Alfons X. die stattliche Anzahl von 400 000 Goldstücken zur Verfügung gestellt haben.

Bei der Gregorianischen Kalenderreform berief man sich auf die „Alfonsinischen Berechnungen“. Aloisius Lilius nannte in seinem Werk *Compendium Novae rationis restituendi Calendarium* (Kompendium einer neuen Methode zur Reform des Kalenders) aus dem Jahr 1576 die Alfonsinischen Berechnungen. Dort nahm man auch Bezug auf „Copernicus“, dessen Lehren blieben bis zum Erlass der Indexkongregation vom Jahr 1616 kirchlicherseits unbeanstandet.

Paolo Dagomari (Paolo d’Abbaco)

Als ein ausgezeichneter Rechner galt im 14. Jahrhundert Paolo Dagomari, man nannte ihn deshalb „Paolo dell‘Abbaco“ (gest. 1374). Nach Rudolf Wolf schuf er den ersten italienischen Kalender. Von seinen mathematischen Werken seien genannt: *Trattato d’aritmetica und Una raccolta di tre libri d’Abbaco.* In der letztgenannten Schrift wird ein Multiplikationsverfahren aufgezeigt, das indisch-arabischer Herkunft ist. Bei Georges Ifrah findet sich hierfür die Bezeichnung „per gelosia“. Andere nennen dieses Verfahren „Die Blitzartige“. Dieses Multiplikationsverfahren stellte Peter Apian in seiner Schrift „Kauffmanß Rechnung“ aus dem Jahr 1527 vor, siehe Abbildung 2.

Abb. 2



Aus: Apian, Peter: Eyn Newe unnd wolgegründte underweysung aller Kauffmanß Rechnung … . Nachdruck [der Ausgabe Ingolstadt 1527] Buxheim 1995.

Heinrich der Seefahrer

Prinz Heinrich der Seefahrer (1394 - 1460) errichtete in Sagres eine Sternwarte und die erste Seefahrtschule der Welt. Durch die von ihm veranlassten Entdeckungsfahrten an die westafrikanische Küste legte er den Grund zur Weltstellung Portugals im 16. Jahrhundert. Durch den 1494 geschlossenen Vertrag von Tordesillas wurden die von Spanien und Portugal neu entdeckten Gebiete abgegrenzt (Schiedsspruch von Papst Alexander VI.).

Nikolaus von Kues (Cusanus)

Auf der Schwelle zwischen dem Mittelalter und der Renaissance steht Nikolaus von Kues (Cusanus, 1401 - 1464). In den Jahren 1445 - 1459 schrieb Cusanus[4] mehrere mathematische Abhandlungen, deren Gegenstand hauptsächlich die Rektifikation und Quadratur des Kreises war. Über das Problem der Quadratur des Kreises diskutierte er mit führenden Mathematikern seiner Zeit, darunter Paolo del Pozzo Toscanelli (1397 - 1482). Der Florentiner Mathematiker und Astronom Toscanelli beriet Brunelleschi beim Bau der Domkuppel von Florenz (1418 - 1436). Filippo Brunelleschi (1377 - 1446) begründete mit dem von ihm geschaffenen Frührenaissance-Stil die neuere Baukunst in Florenz (u.a. Findelhaus, Domkuppel). Er gilt als der Entdecker der Zentralperspektive für die Malerei.

Cusanus, der 1448 zum Kardinal ernannt wurde, erhielt von Papst Nikolaus V. (reg. 1447 - 1455) um 1453 eine Übersetzung der Werke des Archimedes, die Jakob von Cremona auf Veranlassung des Papstes angefertigt hatte, vgl. Helmuth Gericke: Mathematik im Abendland. Berlin … 1990, S. 204). Nikolaus V. war der erste Renaissance-Papst, Förderer des Humanismus und Restaurator vieler Kirchen Roms.

Cusanus, der schon Vorschläge zur Kalenderverbesserung unterbreitete, interessierte sich auch für den Wissensreformer Raimundus Lullus (1235 - 1316). Dieser ließ sich von den von den Arabern eingeführten algebraischen Methoden zu seiner „Ars magna“ inspirieren. Ein Verfahren, durch schematische Anordnung der Begriffe übersichtliche Erkenntnis und sichere Beweisführung zu lehren (nach Brockhaus). Die „Lullus’sche Kunst“

4 Das von Nikolaus von Kues 1447 gestiftete St.-Nikolaus-Hospital in Bernkastel-Kues besteht noch heute.

hat auf die folgenden Generationen von Mathematikern großen Einfluss ausgeübt.

Die Null und eine negative Zahl als Lösung einer Rechenaufgabe

In der *Einführung in die mathematische Philosophie* von Bertrand Russell (1872 - 1970) heißt es: „Was die 0 betrifft, so ist sie erst in neuester Zeit hinzugekommen. Die Griechen und Römer kannten eine solche Ziffer nicht."

Nicolas Chuquet (gest. 1488) vermerkte, dass das Rechnen mit 0 noch nicht selbstverständlich ist. Er konstruierte 1484 eine Rechenaufgabe, bei der fünf Lösungen zu finden waren, wobei sich eine Lösung als negative Zahl entpuppte und für eine andere Lösung galt die Null. Die Aufgabe lautete: „Gesucht sind fünf Zahlen von der Art, daß sie zusammen ohne die erste Zahl 120 ergeben, ohne die zweite 180, ohne die dritte 240, ohne die vierte 300 und ohne die fünfte 360". Er summierte die fünf Zahlen und bildete einen Durchschnitt, wobei er aber als Divisor nicht 5 sondern 4 wählte. Von diesem Ergebnis (1 200 / 4 = 300) subtrahierte er dann jeweils die oben genannten Zahlen; siehe die folgende, verkürzte Darstellung; vgl. Chuquet Nicolas: Renaissance mathematician.

$$\begin{aligned} 300 - 120 &= 180 \\ 300 - 180 &= 120 \\ 300 - 240 &= 60 \\ 300 - 300 &= 0 \\ 300 - 360 &= -60 \end{aligned}$$

Die Null, eine Erfindung der Inder, fand in Europa erst im 16. Jahrhundert eine Anerkennung.

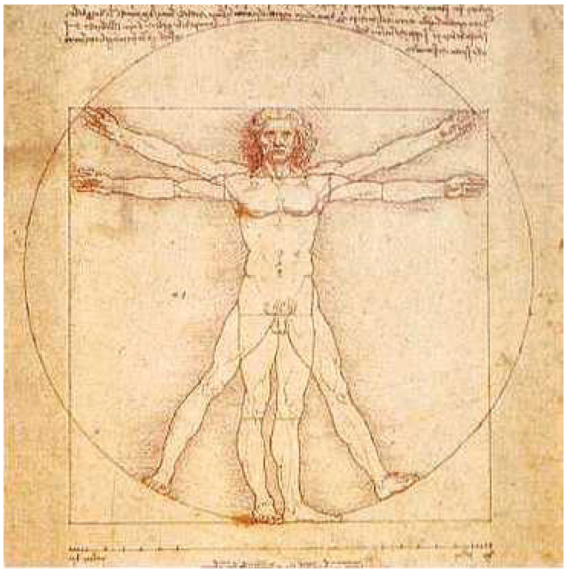
„nos numerus sumus et fruges consumere nati" (*ep*. I 2,27) heißt es beim römischen Dichter Horaz (65 - 8 v. Chr.). Bernhard Kytzler und Durs Grünbein übersetzen numerus mit Nullen anstelle „(bloße) Nummern sind wir."

Italienische Schule

Die Anfänge einer entwickelteren kaufmännischen Rechnung gehen auf die Italiener zurück. Viele Begriffe aus der Finanzwelt sind noch heute gebräuchlich, wie zum Beispiel Giro, Disagio, Lombardgeschäfte, Diskont, Saldo, Bankrott usw. Auch die doppelte Buchführung und der Wechsel (Tratte) sind italienischer Herkunft. Um 1500 galt Venedig als die Ausbildungsstätte der süddeutschen jungen Kaufleute. Der spätere Hauptbuchhalter der Fugger, Matthäus Schwarz, war in seiner Jugend nach Italien gekommen, um die Buchhaltung zu erlernen.

Eine große Rolle spielten Proportionen in der darstellenden und in der bildenden Kunst der Renaissance: Leonardo da Vinci (1452 - 1519), Albrecht Dürer (1471 - 1528). Leonardo da Vinci's Erkenntnisse und Erfindungen auf naturwissenschaftlichem und technischem Gebiet sowie seine gestalterischen Leistungen waren von großer Bedeutung. Genannt sei sein Proportionsschema der menschlichen Gestalt („Der Nabel ist der Mittelpunkt des Körpers"); siehe Abbildung 3.

Abb. 3



Proportionsschema der menschlichen Gestalt von Leonardo da Vinci (1452 - 1519).

Summa von Pacioli

In Venedig erschien im Jahr 1494 die „Summa", das größte Werk von Luca Pacioli (1445/50 - 1514). Der ausführliche Titel lautet: *Suma de Arithmetica Geometria Proportioni et Proportionalita*. Die Summa des Franziskanermönchs Pacioli enthält neben der Abhandlung über die Buchhaltung auch einige Abschnitte über kaufmännische Arithmetik, in denen u.a. auch Aufgaben aus der Zins- und Diskontrechnung enthalten sind.

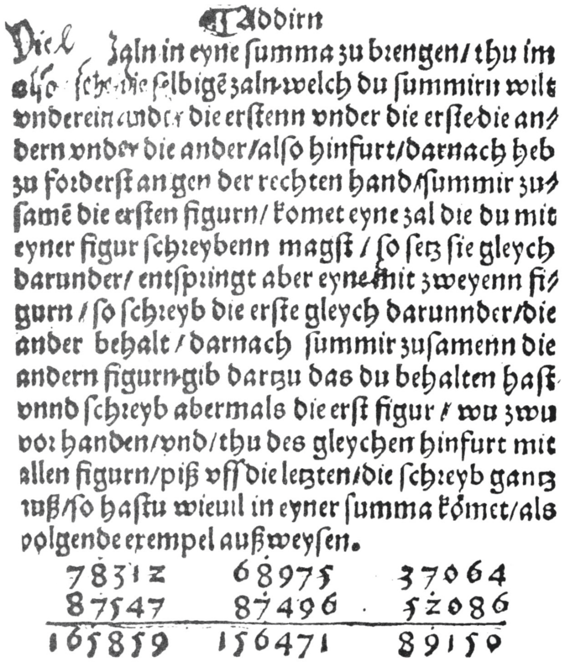
Erdglobus von Behaim

Um 1492 wurde der Erdglobus („Erdapfel" genannt) entwickelt. Seine Herstellung soll Martin Behaim (1459 - 1507) angeregt haben. Die Entfernungsangaben auf diesem Globus waren sehr ungenau. Nach Götz Freiherr von Pölnitz ist dieser Globus wahrscheinlich der früheste, mindestens der älteste erhaltene Globus der Welt.

Das Volksrechenbuch von Adam Ries(e)

78 312 und 87 547: Mit diesen beiden ungewohnten Zahlen begannen in Deutschland viele Generationen das schriftliche Addieren zu lernen (s. Abb. 4). Die Regel dazu gab der aus dem fränkischen Staffelstein stammende Adam Ries (1492 - 1559). Im Jahre 1522 vollendete er sein Werk *Rechnung auff der Linihen und Federn* … .

Abb. 4



Addirn

Viel zaln in eyne summa zu brengen/ thu im also schreib die selbigē zaln welch du summirn wilt vndereinander die erstenn vnder die erste die andern vnder die ander/also hinfurt/darnach heb zu forderst an gen der rechten hand/summir zusamē die ersten figurn/ komet eyne zal die du mit eyner figur schreybenn magst / so setz sie gleych darunder/ entspringt aber eyne mit zweyenn figurn / so schreyb die erste gleych darunnder/die ander behalt / darnach summir zusamenn die andern figurn gib darzu das du behalten hast vnnd schreyb abermals die erst figur / wu zwu vor handen/vnd/thu des gleychen hinfurt mit allen figurn/piß vff die letzten/die schreyb gantz nuß/so hastu wieuil in eyner summa kōmet/als volgende exempel außweysen.

78312	68975	37064
87547	87496	52086
165859	156471	89150

Aus: Das 2. Rechenbuch von Adam Ries. Nachdruck der Erstausgabe Erfurt 1522. Von Stefan Deschauer. München 1991.

„Kaufmannß Rechnung“ von Peter Apian (1527)

„Nach Adam Riese“ pflegt man zuweilen die Richtigkeit einer Rechnung zu bekräftigen (eigentlich Adam Ries). Nicht so berühmt scheint die 1527 erschienene „Kauffmanß Rechnung“ *(Eyn Newe unnd wolgegründte underweysung aller Kauffmanß Rechnung in drey Büchern* …) von Peter Apian (1501 - 1552) zu sein. Weite Kreise kannten seine 1524 herausgegebene *Cosmographia*. Seine in deutscher Sprache erschienene Kauffmanß Rechnung verdient in mehrfacher Hinsicht Aufmerksamkeit (z.B. arithmetisches Dreieck, Wucherrechnung, Rossverkauf).

Apian schmückte die Titelseite seiner „Kauffmanß Rechnung“ mit einem arithmetischen Dreieck (bekannter als Pascal‘sches Dreieck). Wie bereits im Passus *Ein Blick in die Historie der Wahrscheinlichkeitsrechnung* (BiZ 1/2008) erwähnt wurde, war das die erste Darstellung der Binomialkoeffizienten im christlichen Abendland. Seine Zinseszinsaufgaben wies Apian unter Wucher aus. Beim Rossverkauf zeigt Peter Apian eine geometrische Progression (s. Abb. 6).

Die genannte Schrift von Apian wurde zu dessen Lebzeit noch viermal aufgelegt. Bei der fünften Auflage von 1544 zeigt das Titelbild eine Gegenüberstellung der beiden Rechenverfahren „auf den Linien“ und „mit der Feder“. Anläßlich des 500. Geburtstags von Peter Apian erschien 1995 die „Kaufmannß Rechnung“ als Faksimile. Peter Apian leistete so auch einen Beitrag zur Entwicklung der deutschen Sprache.

Der aus Sachsen eingewanderte Peter Apian (eigentlich Bienewitz) unterrichtete an der 1472 gegründeten Universität Ingolstadt den jungen bayerischen Erbprinzen Albrecht V. (1528 - 1579) in Kosmo- und Geographie wie in Mathematik. Sein Lehrbuch der Astronomie auf geozentrischer Grundlage *Astronomicum caesareum* widmete Apian Kaiser Karl V., der ihn in den Reichsritterstand erhob. Am Rande sei aufgeführt: Der Landsassenbrief Kurfürst Friedrichs II. für den Professor der Mathematik Peter Apian vom 6. Juni 1547, der ihm für das erkaufte Dorf Ittelhofen im Amt Holnstein [Seubersdorf i.d.Opf.] gegeben wurde.

An dieser Stelle ist ein Werk von Michael Stifel (1487 - 1567) zu nennen, das 1546 in Nürnberg erschien: *Rechenbuch von der Welschen und Deutschen Practick, auff allerley vorteyl und behendigkeit … zu machen*.

Förderung der deutschen Sprache

Die Entwicklung der deutschen Sprache wurde maßgeblich von Martin Luther (1483 - 1546) durch seine Übersetzung der Bibel und mit seinen deutschen Schriften beeinflusst (1522 erschien das *Neue Testament*). Begünstigt wurde dies durch die zuvor gelungene Erfindung der Buchdruckerkunst durch Johannes Gutenberg (vor 1400 - 1468). Luther wollte das Deutsche ebenbürtig neben die drei Sprachen des Mittelalters (Hebräisch, Griechisch und Latein) stellen.

Das erste große Geschichtswerk in deutscher Sprache schrieb Johannes Turmair (1477 - 1534), der sich Aventinus nannte: Die *Baierische Chronik* (bis 1519) wurde 1566 gedruckt. Im Jahr 1523 gab er eine Karte von Ober- und Niederbayern heraus, die als früheste Karte des bayerischen Raums gelten muß (Georg Hanke). Sein humanistisches Wissen erwarb Aventinus auf den ersten Hochschulen seiner Zeit (Krakau, Wien und Paris).

Erste Ansätze zu den Logarithmen bei Michael Stifel

Das Rechnen mit Potenzen von beliebigen rationalen Exponenten findet sich in der von Michael Stifel 1544 in Nürnberg herausgebrachten Schrift *Arithmetica integra*. Er stellte eine arithmetische Reihe einer geometrischen gegenüber (s. Abb. 5)

-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6
1/8	1/4	1/2	1	2	4	8	16	32	64.

Diese Tabelle wird als eine erste Logarithmen-Tafel (zur Basis 2) angesehen. Die Lücken in der geometrischen Reihe waren allerdings noch groß. Jede positive Zahl (außer 1) kann bekanntlich als Basis zur Potenzdarstellung der positiven Zahlen gewählt werden. Noch fehlen die Dezimalbrüche. In der arithmetischen Reihe fand die Null ihren Platz und die negativen Zahlen treten auch in Erscheinung. Letztere bezeichnet Stifel „absurd“ und „fiktiv“.

Abb. 5

Sic Cossa solet, pro immensa copia sua, ijs uti quæ sunt, & ijs quæ finguntur esse. Nam sicut supra unitatem ponuntur numeri integri, & infra unitatem finguntur minutiæ unitatis, & sicut supra unum ponuntur integra, & infra unum ponuntur minuta seu fracta: sic supra 0 ponitur unitas cum numeris, & infra 0 fingitur unitas cum numeris. Id quod pulchre repræsentari uidetur in progressione numerorum naturali, dum seruit progressioni.

Sed ostendenda est ista speculatio per exemplum.

−3	−2	−1	0	1	2	3	4	5	6
$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8	16	32	64

Posset hic fere nouus liber integer scribi de mirabilibus numerorum, sed oportet ut me hic subducā, & clausis oculis abeā. Repetam uero unum ex superioribus, ne frustra dicar fuisse in campo isto. Sed sententia inuersa repetam quod mihi repetendum uidetur.

Qualiacunq; facit progressio Geometrica multiplicādō & diuidendo, talia facit progressio Arithmetica addendo & subtrahendo. Exemplum.

Sicut $\frac{1}{8}$ multiplicata in 64, facit 8, Sic − 3 additum ad 6, facit 3.

Aus: Stifel, Michael: Arithmetica integra. Nürnberg 1544.

Betrachtet man die Zahlen der oberen Reihe als die Exponenten, dann sind die Zahlen in der unteren Reihe die Werte der Potenzen zur Basis 2. Mit diesen Reihen lassen sich Multiplikationen und Divisionen, aber auch Wurzelberechnungen ausführen – wenn auch auf bescheidenem Niveau.

Stifel schreibt (s. fol. 149 - 150): „Est autem -3 exponens ipsius 1/8, sicut 6 ...“ (Es ist -3 der Exponent von 1/8, so auch 6 der Exponent der Zahl 64 und 3 der Exponent der Zahl 8). Das bedeutet:

1/8 mal 64 = 8 (geometrische Reihe)

-3 plus 6 = 3 (arithmetische Reihe).

Nachfolgend zwei Beispiele, wie mit diesen Reihen gerechnet werden kann:

Soll beispielsweise 4 mit 16 multipliziert werden, so sucht man die über 4 und 16 stehenden Zahlen und findet 2 und 4. Diese werden addiert und unter der Summe 6 liest man das Ergebnis 64 ab.

Das Wurzelziehen (Radizieren) ermöglicht die Division. So erhält man die dritte Wurzel aus 64 folgendermaßen: Der Zahl 64 in der geometrischen Reihe entspricht die Zahl 6 in der arithmetischen Reihe. Sodann dividiert man 6 durch 3 und erhält das Ergebnis 2. Dem in der arithmetischen Reihe ausgewiesenen Wert 2 entspricht die Zahl 4 in der geometrischen Reihe, das ist der gesuchte Wurzelwert.

Mit diesen Zahlenreihen von Stifel werden sich später noch weitere Personen befassen, darunter wohl auch Jost Bürgi. Eine allgemeine Anerkennung fanden die negativen Zahlen aber noch lange nicht.

Vor Stifel stellte bereits Peter Apian in seiner 1527 herausgegebenen Schrift „Kauffmanß Rechnung“ bei der Aufgabe zum Rossverkauf eine arithmetische Progression einer geometrischen gegenüber (s. Abb. 6). Die arithmetische Reihe beginnt mit 0 und die geometrische mit 1.

Abb. 6

505 geben 100 / was geben 3570 machet 70 fl 4 ß 25 $\frac{11}{101}$ hl. So vil muß er im geben vor seine arbeit.

Exempel der underschnitten Progressionn.

Item einer wil ein roß verkauffenn nach den Negeln. Das roß hat 4 Eysen / Ein iclich eysen 8 negel / machent allenthalben 32 Negell / So wil er den erstenn nagel geben umb eynē haller / den andern umb 2 haller / den dritten umb 4 haller / den vierden umb 8 haller / den fünfften umb 16 rc. allemal nach sorterer. Ist die frag wie teuer / das Roß verkaufft wirt. Machs nach der progression in Dupla Proportione. Also setz vor dich etliche stett der progression / alß.

0.	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10
1.	2.	4.	8.	16.	32.	0.	0.	0.	0.	1024

Multiplicir 32 mit 32 facit 1024. die zall sol stehen under der Zehend signatur. Multiplicir 1024 in sich / kombt 1048576.

Aus: Apian, Peter: Eyn Newe unnd wolgegründte underweysung aller Kauffmanß Rechnung … . Nachdruck [der Ausgabe Ingolstadt 1527] Buxheim 1995.

An das fortgesetzte Halbieren einer Strecke sei hier erinnert: Eine Strecke läßt sich durch wiederholtes Halbieren in 2, 4, 8, 16, 32 usw. gleiche Abschnitte teilen.

1554 erste Landvermessung Bayerns durch Philipp Apian

Der bayerische Herzog Albrecht V. (1528 - 1579) beauftragte 1554 Philipp Apian (1531 - 1589), den Sohn seines ehemaligen Lehrers Peter Apian, mit der ersten bayerischen Landvermessung. Bereits mit 21 Jahren wurde Philipp Apian der Nachfolger seines Vaters an der Universität in Ingolstadt. Philipp Apian schuf ein für die damalige Zeit erstaunliches Werk, die Mappa. Der Auftrag an Apian sollte nicht nur zur Förderung der Wissenschaft beitragen, er hatte auch praktische Gründe: Von der Erfassung des Landes sollte auch eine neu zu regelnde Steuererhebung ausgehen, denn die Staatskasse war leer.

Die *Baierischen Landt-Tafeln* erschienen 1568 in Ingolstadt. Wegen seiner Neigung zum Protestantismus ging Philipp Apian 1569 an die Universität Tübingen. Diese Stelle verlor er, weil er die Concordienformel nicht unterschreiben wollte. Er wurde durch seinen früheren Schüler Mästlin (Lehrer von Kepler) ersetzt und starb 1589.

Gregorianische Kalenderreform 1582

Schon Papst Sixtus IV. (reg.1471 - 1484) wollte den Kalender reformieren und holte Regiomontanus als Berater, der jedoch bald nach seiner Ankunft in Rom (1476) verstarb. Der aus Königsberg (Franken) stammende Regiomontanus, eigentlich Johann Müller (1436 - 1476), gab Kalender und Ephemeriden (Angaben über die tägliche Stellung der Himmelskörper) heraus, die u. a. Kolumbus und Vespucci benutzten. Regiomontanus zählt zu den bedeutendsten Mathematikern des 15. Jahrhunderts in Europa. Ihm schwebte eine Revision der Lehre von der Planetenbewegung vor (nach Rudolf Wolf ein Mißverständnis, S. 231).

Papst Gregor XIII. (reg. 1572 - 1585) gelang es 1582 nach einer über drei Jahrhunderte andauernden Diskussion über die Verbesserung des Kalenders die Kalenderreform durchzusetzen. An dieser wirkte Christophorus Clavius (1537 - 1612, eigtl. Christoph Klau) entscheidend mit. Der in Bamberg geborene Mathematiker und Jesuit war auch Mitglied der Kalenderkommission. Auf ihn gehen übrigens einige Osterparadoxien zurück; vgl. Bayern in Zahlen 4/2000 S. 151. Der bereits genannte Aloisius Lilius, der zur Verbesserung des Kalenders Vorschläge unterbreitete, war bereits 1576 verstorben (s. Bayern in Zahlen 12/1999 S. 537).

Clavius brachte 1574 eine lateinische Ausgabe der *Elemente* des Euklid heraus. In seinem 1593 erschienen Buch *Astrolabium* berichtete Clavius auch über die „Prosthaphaerese“ (s.u.). Seine *Algebra* (1608) bündelte die Lehre der Cossisten (Frühform der Algebra im 15. und 16. Jahrhundert; Cosa = ital. Bezeichnung für die Unbekannte in einer Gleichung). René Descartes (1596 - 1650) lernte Geometrie und Algebra nach den Ausgaben von Clavius.

Nach dieser Abschweifung noch einige Anmerkungen zum Gregorianischen Kalender: In seiner Geschichte der Astronomie bemerkte Rudolf Wolf (s. S. 331): „… während ihn die Annahme des von Omar-Cheian[5], Astronom des seldschuckischen Sultans Malek-Schah, um 1080 in Persien eingeführten rationellen Cyclus von 33 Jahren mit 8 Schaltjahren in 12mal kürzerer Zeit sogar auf 14½ sec heruntergebracht hätte.“

Im Kalenderstreit versuchte Johannes Kepler (1571 - 1630) als Befürworter der Gregorianischen Kalenderreform zu vermitteln. Für Kaiser Matthias schrieb Kepler ein Gutachten und begleitete diesen 1613 zum Reichstag zu Regensburg, um dasselbe zu vertreten. Dieses Thema wurde dort aber nicht behandelt.

Wenig bekannt ist, dass sich Kepler auch mit dem Geburtsjahr Jesu auseinandergesetzt hatte. Ein 1604 auftretendes Himmelsphänomen (Supernova) wies wahrscheinlich Parallelen zur Geschichte vom Stern von Bethlehem auf und war für Kepler und andere Anlaß, über die Zeitrechnung nachzudenken (siehe BiZ 12/1999 S. 540). Die von Kepler geäußerte Theorie bestätigten später Ludwig Ideler (1766 - 1846) und Konradin (Graf) Ferrari d’Occhieppo (1907 - 2007).

Julianische Periode

Fast gleichzeitig mit der Kalenderreform führte Joseph Justus Scaliger (1540 - 1609) die nach seinem Vater benannte „Julianische Periode“ ein, die sich aus dem 28-jährigen Sonnenzirkel, dem 19jährigen Mondzirkel und dem 15-jährigen Indiktionszirkel („Römerzinszahl“) zusammensetzt mit einer Periode von 7980 ($= 28 \cdot 19 \cdot 15$) Jahren.

Julianischer Tag

Die fortlaufende Zählung von Tagen kam erst im 19. Jahrhundert auf. Sie ist erstmals 1849 in John Herschel‘s Buch *Out-*

5 Unterschiedliche Schreibweisen für einen der bedeutendsten Mathematiker des Mittelalters.

lines of Astronomy nachweisbar, vgl. Franz Krojer: Die Präzision der Präzession. München 2003, Seite 436.

Noch immer mangelt es an der korrekten Bezeichnung für diese Zählung. Zutreffend ist hierfür „Julianische Tageszahl“ oder „Julianischer Tag“, nicht „Julianisches Datum“. Mit dem Julianischen Kalender hat diese Größe nichts zu tun. Die Julianische Tageszahl ist eine fortlaufende Zählung von Tagen vom Beginn des Jahres 4713 vor Christus (-4712).

Diskont-Tabellen von Simon Stevin (1548 - 1620)
Im Jahr der Einführung des Gregorianischen Kalenders (1582) wurde die Schrift *Tafelen van Interest* des 1548 zu Brügge geborenen Simon Stevin veröffentlicht. Von ihr war an anderer Stelle schon die Rede.

Simon Stevin, ein Verfechter der Dezimalbruchrechnung, publizierte im Jahr 1585 sein Werk *De Thiende*. Im gleichen Jahr erschien auch seine *La Pratique d’Arithmétique* (In: *L´Arithmetique*. Leyden 1585), die Tabellen mit Abzinsungen (Diskontierung) enthielt.

Stevin trat für die Einführung dezimal unterteilter Münz-, Maß- und Gewichtssysteme ein. Bei ihm fanden negative Zahlen bereits Anerkennung und er setzte sich auch für die indisch-arabische Zahlenschreibweise von Brüchen ein. Den für den Schiffbau wichtigen Begriff des Metazentrums führte übrigens Stevin ein. Er war ein Anhänger der kopernikanischern Lehre.

Für die Bestimmung der Anzahl der Zinsperioden mussten aber erst noch die Logarithmen erfunden werden. Die von Stevin bearbeiteten Tafeln zur Berechnung von Zinseszinsen sollen von Jost Bürgi fortgesetzt worden sein.

Die Mercatorkarte
Im Jahr 1587 erschienen die Erdkarten von Gerhard Kremer (1512 - 1594), genannt Mercator. Die Mercatorkarte war für Geographie und Nautik bedeutsam. Er führte Atlas für Landkartensammlung ein.

Steigende Ansprüche an Rechenverfahren: Prostaphaerese
Die gestiegenen Ansprüche an Rechenverfahren verlangten nach einer Erleichterung der Rechenarbeiten. Die ersten Einflüsse gingen dabei von der Astronomie aus. Es sei daran erinnert, dass die Daten des auf Genauigkeit bedachten Tycho Brahe (1546 - 1601) Kepler die Auffindung seiner Planetengesetze ermöglichten.

Mit dem Rechenverfahren „Prostaphaerese“ wurden Multiplikationen und Divisionen durch Addition und Subtraktion trigonometrischer Funktionen ersetzt. Das Wort Prostaphaerese ist ein Zusammenzug von Prosthesis (griech. Addition) und Aphaerese (griech. Wegnahme). Paul Wittich hat dieses Verfahren mit Tycho Brahe ausgearbeitet. Mit diesem Verfahren beschäftigte sich zuvor schon der zu Nürnberg geborene Johannes Werner (1468 - 1528). Die „Prostaphaerese“ wurde später durch das logarithmische Rechnen verdrängt.

Anfänge der Prosthaphaerese finden sich nach Rudolf Wolf (*Geschichte der Astronomie*) schon bei Albategnius, die dann wieder verloren gingen oder übersehen wurden, so dass das Ganze im 16. Jahrhundert noch einmal von Anfang an erfunden werden musste. Albategnius (Battani), der 929 verstarb, berechnete auf Grund seiner Beobachtungen bis in das Mittelalter benutzte Tafeln der Örter der Planeten. Er bestimmte die Präzession, die Elemente der Sonnenbahn und die Jahreslänge neu. Die Trigonometrie förderte er durch Einführung der trigonometrischen Funktionen.

Ein Beispiel für die Division mittels Prosthaphaerese
Eine wichtige Formel lautete:
$\sin\alpha \cdot \sin\beta = ½ [\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)]$. Mit dieser Formel wird erläutert, wie Divisionen ausgeführt wurden. Abbildung 7 gibt hierfür ein Beispiel.

Abb. 7

II Division $\frac{A}{B}$

$$\frac{A}{B} = 10^n \frac{a}{b} \qquad a = \sin\alpha$$

$$= 10^n \sin\alpha \cdot \sin\beta \qquad b = \operatorname{cosec}\beta$$

Beispiel: $\frac{207{,}343}{51{,}7886}$

mit einer 6stelligen Sinus-Tafel auszuführen

$A = 207{,}343$ | $n = 2$
$B = 51{,}7886$ | $a = 0{,}207343 = \sin\alpha$
$b = 5{,}17886 = \operatorname{cosec}\beta$

$\alpha = 11^\circ\,58'$ | $\cos(\alpha-\beta) = 0{,}999894$
$\beta = 11^\circ\;\;8'$ | $\cos(\alpha+\beta) = 0{,}919821$
$\alpha-\beta = 0^\circ\,50'$ | Differenz $0{,}080073$
$\alpha+\beta = 23^\circ\;\;6'$ | $\sin\alpha\cdot\sin\beta = 0{,}040036$

$$\frac{A}{B} = 4{,}0036$$

genauer Wert $4{,}003641$.

Quelle: Nova Kepleriana. Neue Folge-Heft 5: Die Coss von Jost Bürgi in der Redaktion von Johannes Kepler. Ein Beitrag zur frühen Algebra. Bearbeitet von Martha List und Volker Bialas. München 1973. (= Bay. Akad. der Wissensch. Math.-Naturwiss. Klasse. Abhandlungen Neue Folge, Heft 154).

Eine Art Prosthaphaerese nach Leibniz

Dem Begriff Prosthaphaerese begegnet man auch bei Leibniz. Er schätzte das voraussichtliche künftige oder mittlere Leben eines Kindes auf (0 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 usw. + 80) / 81 Jahre und verglich dies mit der Weise, in der die Bauern bei der „Braunschweiger Teilung" vorgehen, wenn Erbschaften zu teilen oder Grundstücke zu schätzen sind. Dabei werden drei Schätzungen vorgenommen, eine jede von ein paar Männern, die zu diesem Zweck ausersehen wurden. Das Volk dort nennt sie die drei Schürzen. Festgesetzt werden der dritte Teil der Gesamtsumme oder ein Drittel. Leibniz wörtlich: „Dies wäre der mittlere Wert, der durch eine Art Prosthaphaerese gesucht wurde, woraus der Beweis für dieses Vorgehen auf der Hand liegt. Da hier 81 Schätzungen mit gleichem Recht vorgenommen werden können, kann nämlich auf dieselbe Weise das Leben dieses Kindes auf entweder 0 oder 1 oder 2 oder 3 oder 4 usf. Jahre bis zu 80 geschätzt werden, …"

Vorläufer der Logarithmen

Jost Bürgi (1552 - 1632) erweiterte die Prostaphaerese und wandte sie auch an. Er suchte aber nach anderen Hilfsmitteln zur Bewältigung der Rechenarbeiten. Nicht nur Bürgi war wohl die Gegenüberstellung einer arithmetischen und einer geometrischen Progression bekannt, die Michael Stifel 1544 in seinem Werk *Arithmetica integra* publizierte. Bürgi wusste wohl auch vom Bemühen des Simon Stevin, dass die Dezimalbrüche Verbreitung finden. Der zu Lichtensteig im Toggenburg (Schweiz) geborene Bürgi verbrachte die längste Zeit seines Lebens im Dienste des Landgrafen Wilhelm IV. von Hessen in Kassel.

Bürgi und John Neper (Napier; 1550 - 1617) fanden voneinander unabhängig erste Lösungen für „Logarithmentafeln". Ihre Tafeln waren aber noch keine Logarithmen im heutigen Sinn. Neper veröffentlichte vor Bürgi im Jahr 1614 seine *Mirifici Logarithmorum Canonis descriptio.*

Mit Neper stand Henry Briggs (1556 - 1630) in Verbindung. Dieser erkannte den Vorteil, den Logarithmen mit der Basis 10 für das praktische Rechnen haben. Im Jahr 1617 erschien seine *Logarithmorum chilias prima* und 1624 das Werk *Arithmetica Logarithmica*. Briggs beschränkte sich nur auf die ganzen Zahlen von 1 bis 20 000 und 90 000 bis 100 000, diese berechnete er aber auf 14 Stellen. Adriaan Vlacq (1600 - 1667) ergänzte die Lücken in Briggs' Tafel.

Progreß Tabulen von Jost Bürgi

Tatsächlich war Bürgi schon früher im Besitz (1588) seiner „Progress Tabulen", die er jedoch erst 1620 unter dem Titel *Aritmetische und Geometrische Progress Tabulen/sambt gründlichem unterricht/wie solche nützlich in allerley Rechnungen zugebrauchen/und verstanden werden sol* veröffentlichte (s. Abb. 8). Kepler bezeugte, dass Bürgi vor Napier über seine Tabulen verfügte: „der zögernde Mann jedoch, der seine Geheimnisse bewachte, ließ das Kind bei der Geburt im Stich, und er erzog es nicht (durch sofortige Drucklegung) zum öffentlichen Nutzen" (zitiert nach Rudolf Wolf).

Nach H.G. Zeuthen benutzte Kepler Logarithmen bei der Ausarbeitung der 1627 erschienenen „Rudolphinischen Tafeln", die auf den Beobachtungen von Tycho Brahe basierten.

Bürgi berechnete eine „Logarithmentafel", deren Basis fast genau die Zahl e war: der Wert $1{,}0001^{10\,000} = 2{,}718146$ stimmt bereits auf drei Nachkommastellen mit $e = 2{,}718282\ldots$ überein.

Die sich daraus ergebende Entwicklung war damals noch nicht abzusehen. Man denke dabei nur an die Wahrscheinlichkeits- und die Zinseszinsrechnung.
Fraglich, ob damals schon Klarheit darüber bestand, dass $x^a = b$ etwas anderes bedeutet als $a^x = b$. Der erste Ausdruck bedeutet heute Potenzieren und der letzte ist eine Exponentialfunktion. Die Umkehrung des ersten Ausdrucks $x^a = b$ ist die lytische Operation des Wurzelziehens, also $x = \sqrt[a]{b}$. Für den zweiten Ausdruck war aber damals noch keine Lösungsmöglichkeit bekannt.

Die Beziehungen der Exponentialfunktion und deren Umkehrung wurden erst im 18. Jahrhundert durch Euler aufgeschlossen.

Es wurde bereits erwähnt, dass jede positive Zahl (außer 1) als Basis zur Potenzdarstellung der positiven Zahlen gewählt werden kann. Daher gibt es dementsprechend viele Logarithmensysteme. Heute sind von besonderer Bedeutung: die dekadischen oder Zehnerlogarithmen, die natürlichen Logarithmen und die dualen oder binären (dyadischen) Logarithmen.

Logarithmisches Rechnen – Symbol e

Die historische Entwicklung der Theorie der Logarithmen nach

Abb. 8

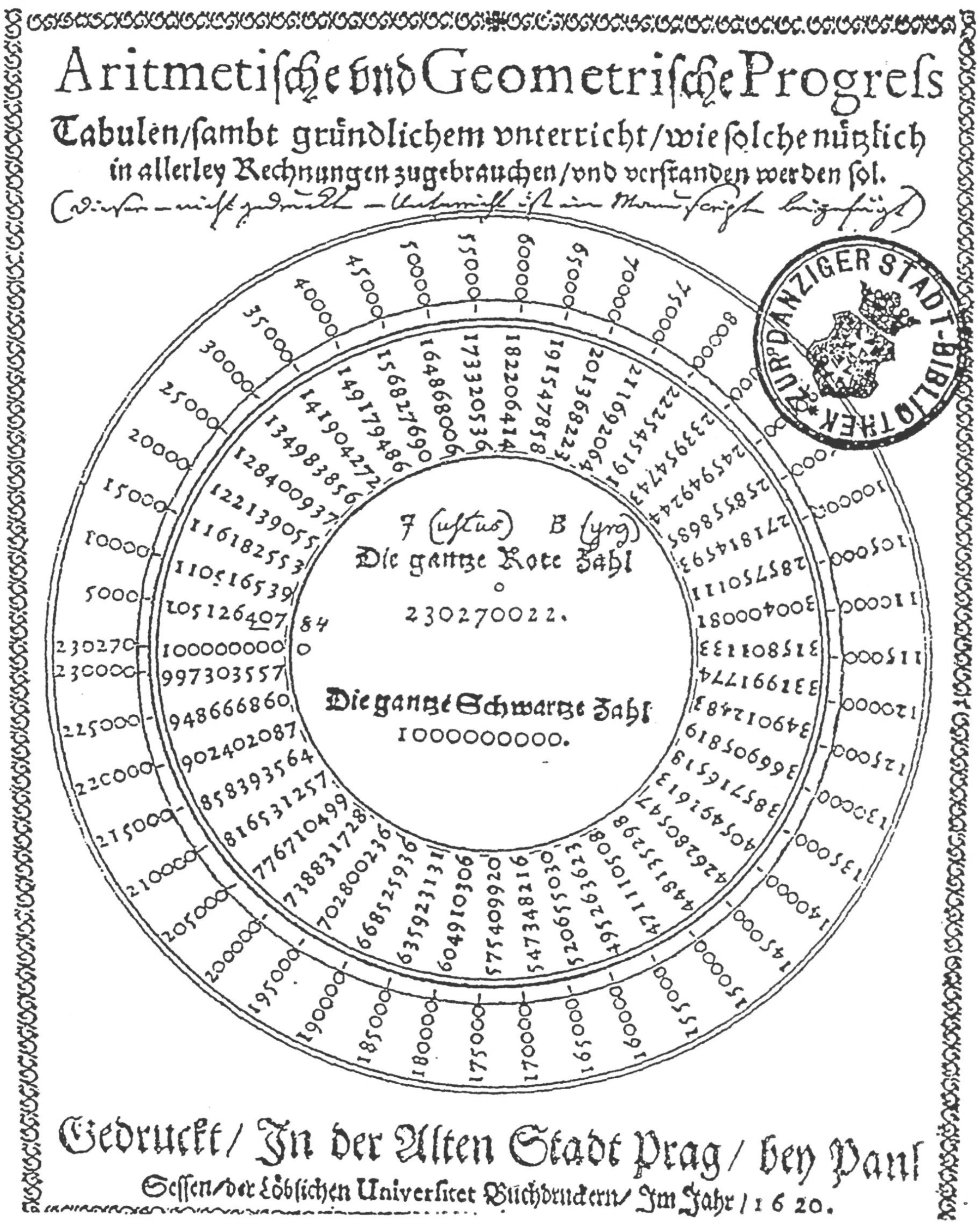


Abb.1 Titelblatt des Exemplars der Danziger Stadt-Bibliothek mit den handschriftlichen Korrekturen 84 und 0, wahrscheinlich von Benjamin Bramer, vielleicht sogar von Bürgi selbst. Die Zahlen im äusseren Kreise, die Logarithmen der zugeordneten Zahlen des inneren Kreises, sind im Original rot.

Aus: Jost Bürgi's „Progress Tabulen“ (Logarithmen) / nachgerechnet und kommentiert von Heinz Lutstorf und Max Walter. Schriftenreihe der ETH-Bibliothek, Nr. 28, Zürich 1992.

Neper und Bürgi schildert Felix Klein (1849 - 1925) in seinem Buch *Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus I*. Dort begegnet man Namen wie Nicolaus Mercator (Kaufmann), Isaac Newton, Brook Taylor und Leonhard Euler. Hier eine grobe Skizzierung zur weiteren Entwicklung der Logarithmen.

Nicolaus Mercator (1620 - 1687) [eigentl. Kaufmann] hat die Bezeichnung „natürlicher Logarithmus“ oder auch „hyperbolischer Logarithmus“ eingeführt. Sein Buch *Logarithmotechnica* erschien 1668 in London.

Als nächstes sind die Arbeiten von Newton (1643 - 1727) aufzuführen: der allgemeine binomische Satz und die Methode der Reihenumkehrung.

Brook Taylor (1685 - 1731) fand einen bequemeren Weg zur Ableitung der Exponentialreihe. In seinem Werk *Methodus incrementorum Directa & Inversa* stellte er 1715 die nach ihm benannte Reihe dar. Felix Klein bemerkt an anderer Stelle (S. 251): „Die geschichtliche Quelle der Entdeckung des Taylorschen Satzes tatsächlich die Differenzenrechnung ist".

Schließlich nennt Felix Klein die 1748 in Lausanne erschienene Schrift von Leonhard Euler (1707 - 1783) *Introductio in analysin infinitorum*, in der es heißt: „Ponamus autem brevitatis gratia pro numero hoc 2,71828 ... constanter literam e..."

In der Übersetzung von Johann A. Michelsen heißt es im § 122: „Der Kürze wegen wollen wir diese Zahl 2,71828 18284 59 u.s.w. immer durch e bezeichnen, so dass also e die Basis der natürlichen oder hyperbolischen Logarithmen bedeutet, ...". Abbildung 9 zeigt einen Ausschnitt aus der genannten Schrift. Die dort ausgewiesene Zahl e mit 23 Nachkommastellen beeindruckt. Euler bemerkte dazu, dass noch die letzte Ziffer genau ist. Euler bringt dazu zwei Beispiele. Beim ersten Beispiel

Abb. 9

V.d.Entwickel.d.Exp.Größen u.d.Logar.d.Reihen. 127

§. 122.

Da man bey der Verfertigung eines Logarithmischen Systems a nach Gefallen annehmen kann, so kann es auch so gewählt werden, daß k = 1 ist. Es sey also k = 1, so ist aus der oben §. 116 gefundenen Reihe $a = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{1.2.3.4} +$ u. s. f. Verwandelt man diese Brüche in Decimal-Brüche, und addirt man sie wirklich, so erhält man a = 2,71828182845904523536028, wo auch noch die letzte Zifer genau ist. Nimmt man nun diese Zahl zur Basis an, so heißen die zu ihr gehörigen Logarithmen natürliche oder hyperbolische Logarithmen, weil die Quadratur der Hyperbel durch diese Logarithmen ausgedruckt werden kann. Der Kürze wegen wollen wir diese Zahl 2,718281828459 u. s. w. immer durch e bezeichnen, so daß also e die Basis der natürlichen oder hyperbolischen Logarithmen bedeutet, wofür k = 1 ist; oder es soll e die Summe dieser Reihe $1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{1.2.3.4} +$ u. s. w. ohne Ende, ausdrucken.

Aus: Euler, Leonhard: Leonhard Eulers Einleitung in die Analysis des Unendlichen / 1 / aus dem Latein. übers. und mit Anm. und Zusätzen begleitet von Johann Andreas Christian Michelsen. Berlin 1788.

wird gefragt, wie viele Jahre es dauert, bis das menschliche Geschlecht auf das Zehnfache anwächst – bei einer jährlichen Vermehrung von einem hundertstel. Im zweiten Beispiel geht es um die Anzahl der Jahre bis eine Schuld abgetragen wird bei jährlicher Rückzahlung eines festgelegten Betrages und einem vereinbarten Zins.

Im Jahr 1737 erkannte Euler, dass e eine irrationale Zahl ist. Den Beweis der Transzendenz erbrachte 1873 Charles Hermite. Mit der Zahl e waren Grundlagen für verschiedene Bereiche, darunter auch die Zinseszins- und Wahrscheinlichkeitsrechung geschaffen worden.

Felix Klein, der sich auch der Mathematikdidaktik („Erlanger Programm") widmete: „Wenn wir uns nun zum 19. Jahrhundert wenden, so bemerken wir eine weitgehende Popularisierung der Logarithmen, die einmal damit zusammenhängt, dass in den zwanziger Jahren die Logarithmen auf der Schule eingeführt werden, dann damit, dass sie mehr und mehr Anwendung in der physikalischen und technischen Praxis finden (Felix Klein, S. 187)."

Genannt sei schließlich der Tröpfel-Algorithmus, ein Verfahren zur Berechnung eines Näherungswertes zu einer Zahl, das die Dezimalstellen eine nach der anderen liefert. So erhält man $e = 1 + \frac{1}{1}(1 + \frac{1}{2}(1 + \frac{1}{3}(1 + \frac{1}{4}(\ldots))))$. Bemerkenswert ist, dass dieses Verfahren erst 1968 von Arthur H. J. Sale entdeckt worden ist.

Der Nutzen der Logarithmen

Die Einführung der Logarithmen war eine herausragende mathematische Neuschöpfung des Abendlandes. Ein Dithyrambe auf diese besondere Zahl e, die wohl zu den bedeutendsten gehört, stimmten viele an. Vom Marquis Pierre-Simon de Laplace (1749 - 1827) stammt der Ausspruch: „Die Erfindung der Logarithmen kürzt monatelang währende Berechnungen bis auf einige Tage ab und verdoppelt dadurch sozusagen das Leben (der Rechner)."

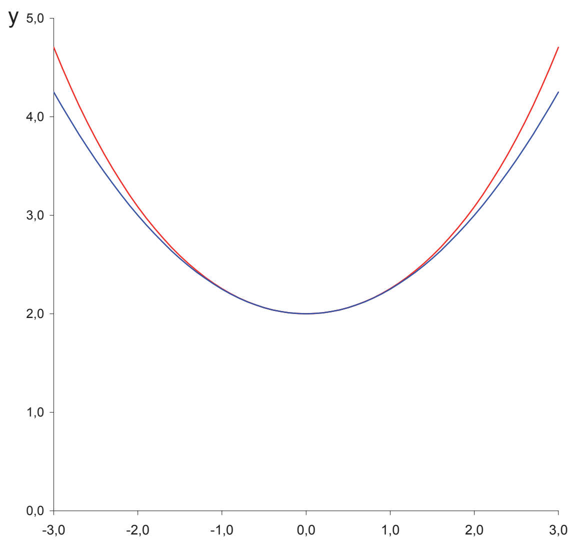
Leonhard Euler (1707 - 1783) drückte sich so aus: „Der größte Nutzen, welchen die Logarithmen gewähren, zeigt sich bei der Auflösung solcher Gleichungen, wo die unbekannte Größe ein Exponent ist." Erst mit Hilfe der Logarithmen konnte eine Gleichung der Form $y = a^x$ gelöst werden.

Die Bedeutung der Logarithmen liegt nicht nur in der enormen Erleichterung des Rechnens. So dienen sie als Arbeitsmittel in vielen Bereichen der höheren Mathematik (z.B. in der Infinitesimalrechnung, bei der Differentialrechnung, in der Funktionentheorie). Zitiert sei der folgende Satz von Carl Friedrich Gauß (1777 - 1855): „Sie ahnen nicht, wieviel Poesie in der Berechnung einer Logarithmentafel enthalten ist“.

Die hängende Kette

Bei der Lösung des berühmten Problems der hängenden Kette gab die Zahl e eine Hilfestellung. Mit der Kettenlinie befassten sich namhafte Gelehrte. Galilei (1564 - 1642) ging davon aus, dass diese Kurve eine Parabel ist. Christiaan Huygens (1629 - 1695) bewies als 17jähriger, dass eine Kettenlinie keine Parabel sein kann. Dann sah man zunächst keine Möglichkeit, wie dieses Problem gelöst werden kann. Des Rätsels Lösung war schließlich: Die Gleichung für die Kettenlinie braucht die ma-

Abb. 10



In der Abbildung ist blau die Parabel ($\frac{x^2}{2a}+a$) und rot die Kettenlinie ($a \cosh \frac{x}{a}$); für $a = 2$.

gische Zahl e. Der Hyperbelkosinus übernimmt dabei eine wesentliche Rolle. Die Kurve verläuft symmetrisch zur y-Achse, und zwar höher als die Parabel (s. Abb. 10). Die Kettenlinie ist eine parabelähnliche Kurve, die ein biegsamer, undehnbarer Faden bildet, der an zwei Punkten frei aufgehängt ist. Die Kettenlinie gehört zu den transzendenten Kurven.

Die logarithmische Spirale

Mit Spiralen beschäftigte sich schon Archimedes (287 - 212). Eine bestimmte Art wurde sogar nach ihm benannt. Die Form der Spirale, die in der Natur häufig anzutreffen ist, nennt man meist die logarithmische Spirale. Wegen einer bestimmten Eigenschaft ist auch von der gleichwinkligen Spirale die Rede. Zuerst wurde sie von René Descartes (1596 - 1650) entdeckt.

Die logarithmische Spirale, auch als Wachstumsspirale bezeichnet, fasziniert durch ihre Eigenschaft, dass sie in jedem Maßstab gleich aussieht. In der Botanik weiß man, daß in natürlichen Spiralen immer wieder spezielle Zahlen vorkommen, so bilden zum Beispiel die Samen der Sonnenblume 55 Spiralen in der einen und 89 in der anderen Richtung. Auf diese Zahlen stößt man auch in der nach Leonardo von Pisa (um 1180 - 1240) benannten Zahlenfolge, der sog. Fibonacci-Reihe: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, ... ; siehe den Beitrag *Ein Blick in die Historie der Wahrscheinlichkeitsrechnung* (S. 81).

Jakob Bernoulli (1655 - 1705) war von der logarithmischen Spirale so beeindruckt, dass er von der „Spira mirabilis“ (der wunderbaren Spirale) sprach und ihr eine eigene Abhandlung widmete. Die einzigartigen und erstaunlichen Transfor-

Abb. 11

Aus: Bernoulli, Jakob: Die Werke von Jakob Bernoulli. Differentialgeometrie / bearb. und komm. von André Weil …/ 5. Basel … 1999.

mationseigenschaften der logarithmischen Spirale haben Bernoulli so fasziniert, dass er auf seinem Grabstein die Worte „Eadem numero mutata resurget“ eingemeißelt wissen wollte. Seinem Wunsch wurde aber nicht voll entsprochen; Abbildung 11 zeigt das Emblem vom Grabmahl des Jakob Bernoulli.

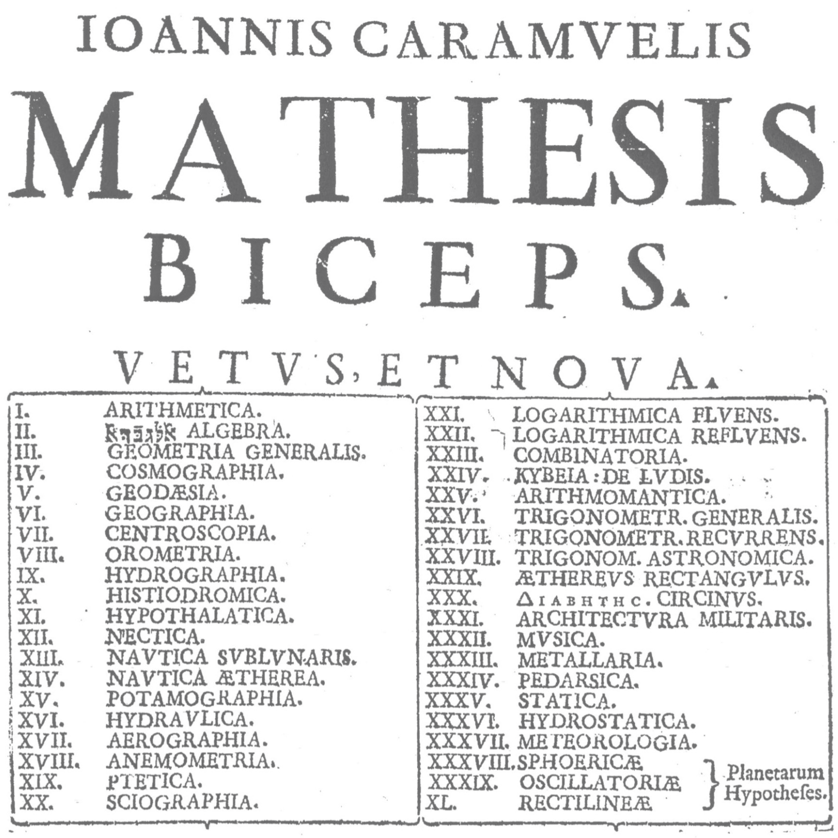
Mathesis biceps von Juan Caramuel (1670)

Das zweibändige Werk *Ioannis Caramuelis Mathesis biceps* aus dem Jahr 1670 wird erwähnt, weil es die größte mathematische Enzyklopädie der Zeit sein soll. Abbildung 12 zeigt die Inhaltsübersicht dieses Werkes, das in Vergessenheit geraten zu sein scheint.

Zur Verbreitung der Rechenzeichen

Die älteste bekannte deutsche Algebra, der *Algorithmus Ratisbonensis* (um 1461), hat keinerlei Symbolik (Wolfgang Kaunzner: Das Rechenbuch des Johann Widmann von Eger. München 1954, S. 39). Die Rechenzeichen + und – erscheinen erstmals 1489 in der Schrift *Behende und hubsche Rechenung auff allen kauffmannschafft* von Johannes Widmann. Das Zeichen x für die

Abb. 12



IOANNIS CARAMVELIS

MATHESIS

BICEPS.

VETVS, ET NOVA.

I.	ARITHMETICA.	XXI.	LOGARITHMICA FLVENS.
II.	[illegible] ALGEBRA.	XXII.	LOGARITHMICA REFLVENS.
III.	GEOMETRIA GENERALIS.	XXIII.	COMBINATORIA.
IV.	COSMOGRAPHIA.	XXIV.	KYBEIA: DE LVDIS.
V.	GEODÆSIA.	XXV.	ARITHMOMANTICA.
VI.	GEOGRAPHIA.	XXVI.	TRIGONOMETR. GENERALIS.
VII.	CENTROSCOPIA.	XXVII.	TRIGONOMETR. RECVRRENS.
VIII.	OROMETRIA.	XXVIII.	TRIGONOM. ASTRONOMICA.
IX.	HYDROGRAPHIA.	XXIX.	ÆTHEREVS RECTANGVLVS.
X.	HISTIODROMICA.	XXX.	ΔΙΑΒΗΤΗC. CIRCINVS.
XI.	HYPOTHALATICA.	XXXI.	ARCHITECTVRA MILITARIS.
XII.	NECTICA.	XXXII.	MVSICA.
XIII.	NAVTICA SVBLVNARIS.	XXXIII.	METALLARIA.
XIV.	NAVTICA ÆTHEREA.	XXXIV.	PEDARSICA.
XV.	POTAMOGRAPHIA.	XXXV.	STATICA.
XVI.	HYDRAVLICA.	XXXVI.	HYDROSTATICA.
XVII.	AEROGRAPHIA.	XXXVII.	METEOROLOGIA.
XVIII.	ANEMOMETRIA.	XXXVIII.	SPHOERICÆ } Planetarum Hypotheses.
XIX.	PTETICA.	XXXIX.	OSCILLATORIÆ } Planetarum Hypotheses.
XX.	SCIOGRAPHIA.	XL.	RECTILINEÆ } Planetarum Hypotheses.

Aus: Caramuel Lobkowitz, Juan: Ioannis Caramuelis Mathesis biceps vetus et nova. Campaniae 1670.

Multiplikation führte 1631 William Oughtred (1574 - 1660) ein. Dieser präsentierte einen Rechenschieber, der diese Bezeichnung durch das Funktionsprinzip verdiente. Der Punkt als Multiplikationszeichen und der Doppelpunkt als Zeichen für die Division wurden von Gottfried Wilhelm Leibniz (1646 - 1716) eingeführt. Das Gleichheitszeichen geht auf Robert Recorde (ca. 1510 - 1558) zurück. Die heutigen Zeichen > und < für größer als und kleiner als stammen von dem englischen Mathematiker Thomas Harriot (1560 - 1621). Die heutige Schreibweise von Potenzen geht auf René Descartes (1596 - 1650) zurück. In der *Arithmetica integra* von Michael Stifel aus dem Jahr 1544 begegnet man schon der Bezeichnung Exponent („exponens").

Außer Rechenzeichen bedarf es auch effizienter Algorithmen oder bestimmter Rechenkniffe. Unter letzteren findet sich die „Ferrol'sche Multiplikation", die hier nicht behandelt wird. Hingewiesen sei auf die „Karatsuba Multiplikation", die erst vor etwa drei Jahrzehnten aufkam. Die Division zweier Zahlen lässt sich mit einem von Newton gefundenen Verfahren leicht bewerkstelligen, falls der Nenner eine große Anzahl an Stellen aufweist..

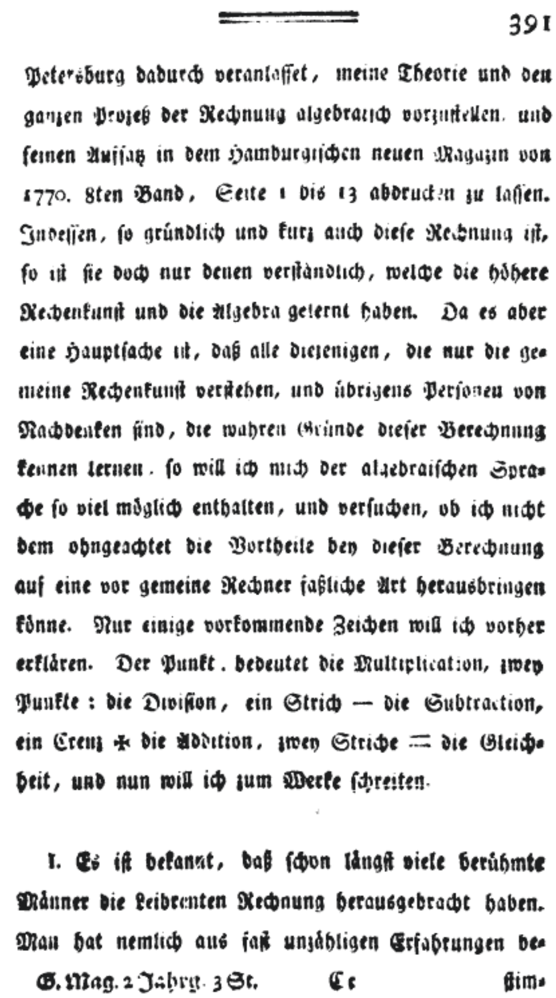
Rechenkenntnisse im 18. Jahrhundert

„Bis weit in das 18. Jahrhundert hinein war die breite Masse der Bevölkerung mit Mathematik bzw. Rechnen kaum befasst.", schrieb Ludwig Bauer 1999.

Es ist bemerkenswert, dass Johann A. Kritter sich im Jahr 1781 zu seiner Schrift *Aufklärung der Berechnungen der Wittwen- und Todtencassen für diejenigen, die sich in der Buchstabenrechnung nicht geübt haben* veranlasst sah. Zur Vorgeschichte:

Der bedeutende Mathematiker Leonhard Euler (1707 - 1783), der schon mehrfach genannt wurde, brachte die Ausführungen von Johann August Kritter zur Einrichtung dauerhafter Witwencassen in algebraische Formen (siehe *Nöthige Berechnung zur Einrichtung einer Witwencaße*. In: Neues Hamburgisches Magazin. 8. Bd., 43.St.,1770). Kritter fand aber, dass diese Schrift von Euler nur denen verständlich ist, welche die höhere Rechenkunst und die Algebra gelernt haben. Deshalb verfasste er seine bereits erwähnte Abhandlung, in der er sich der algebraischen Sprache so viel wie möglich enthalten wollte. Bezeichnend für seine Einschätzung der dama-

Abb. 13



391

Petersburg dadurch veranlasset, meine Theorie und den ganzen Prozeß der Rechnung algebraisch vorzustellen, und seinen Aufsatz in dem Hamburgischen neuen Magazin von 1770. 8ten Band, Seite 1 bis 13 abdrucken zu lassen. Indessen, so gründlich und kurz auch diese Rechnung ist, so ist sie doch nur denen verständlich, welche die höhere Rechenkunst und die Algebra gelernt haben. Da es aber eine Hauptsache ist, daß alle diejenigen, die nur die gemeine Rechenkunst verstehen, und übrigens Personen von Nachdenken sind, die wahren Gründe dieser Berechnung kennen lernen, so will ich mich der algebraischen Sprache so viel möglich enthalten, und versuchen, ob ich nicht dem ohngeachtet die Vortheile bey dieser Berechnung auf eine vor gemeine Rechner faßliche Art herausbringen könne. Nur einige vorkommende Zeichen will ich vorher erklären. Der Punkt . bedeutet die Multiplication, zwey Punkte : die Division, ein Strich — die Subtraction, ein Creuz + die Addition, zwey Striche = die Gleichheit, und nun will ich zum Werke schreiten.

1. Es ist bekannt, daß schon längst viele berühmte Männer die Leibrenten Rechnung herausgebracht haben. Man hat nemlich aus fast unzähligen Erfahrungen be-

G. Mag. 2 Jahrg. 3 St. Cc stim-

Aus: Göttingisches Magazin der Wissenschaften und Litteratur. 2.Jg.,1.St., 1781.
Kritter J.A., S. 391.

ligen Mathematikkenntnisse ist, dass er es für nötig hielt, die Rechenzeichen der Grundrechenarten (., :, -, +, =) zu erklären (s. Abb. 13).

Hankel'sches Permanenzprinzip

Damit die beiden Umkehroperationen der Addition und der Multiplikation immer ausführbar sind, war der Bereich der ganzen Zahlen zu definieren, d.h. der Bereich der natürlichen Zahlen war um die Null und die negativen Zahlen zu erweitern. Erst im Jahr 1867 erfolgte diese Festlegung (Hankel'sches Permanenzprinzip). Die Subtraktion war damit unbeschränkt ausführbar und nimmt man die Brüche hinzu, so wird auch die Division immer möglich, wobei die Division durch Null nicht zulässig ist. Zu erweitern war der Begriff der Potenz (Hochzahl 0 und negative Potenzen). Hermann Hankel (1839 - 1873) hat mit seinem Beitrag dieses Prinzip deutlich gemacht. In vielen Fällen war schon zuvor implizit danach gehandelt worden. Erinnert sei zum Beispiel an Michael Stifel, der in seiner *Arithmetica integra* von 1544 eine arithmetische Reihe einer geometrischen gegenüberstellte und dabei bestimmte Rechenoperationen ausführte.

Beispiele zur Überlegenheit des Stellenwertsystems

Im Dezimalsystem lässt sich mit nur drei Ziffern in der Anordnung $9^{9^9} = 9^{387420489}$ eine Zahl mit 369 693 100 Ziffern darstellen. In Exponentenschreibweise sieht das Ergebnis wie folgt aus:
4.28124773 E+369693099 (gerechnet auf einem modernen Mainframe IBM eServer zSeries 900).

Kurz schreibt man im Dezimalsystem zum Beispiel $2{,}6 \cdot 10^{19}$ km für die Entfernung des Andromedanebels von der Sonne (rund 26 Trillionen Kilometer).

Leider gehörten zum Alltagsleben schon einmal riesige Zahlen: es war die Zeit offener Inflationen. Ein typisches Beispiel ist die deutsche Inflation von 1923. Die nachfolgende Darstellung mit Nachweisen zum Notenumlauf und zum Preis des Dollars soll für sich sprechen. Die ausgewählten Daten stammen von Georg Obst (1873 - 1938). Danach belief sich der Notenumlauf Mitte November 1923 auf den sagenhaften Betrag von 93 Trillionen Mark.

Die deutsche Inflation von 1918 - 1923

Nach Geld-, Bank- und Börsenwesen von Georg Obst

Zeitpunkt (Ende)		Notenumlauf in Mill. Mark	Preis des Dollars in Mark
Juli	1914	1 871	4,20
Dezember	1917	11 468	5,09
Dezember	1918	22 188	8,00
Dezember	1920	68 800	73,37
Dezember	1921	113 639	184,00
Dezember	1922	1 280 095	7 350,00
Juni	1923	17 291 061	154 500,00
15.11.1923	1923	92 844 720 743 031	4 200 000 000 000,00

Sehr große und sehr kleine Zahlen lassen sich übersichtlich mit Hilfe von Zehnerpotenzen darstellen (s. Abb. 14).

Ausgleichsrechnung

Die Ausgleichsrechnung wurde im Wesentlichen von Carl Friedrich Gauß (1777-1855) entwickelt. Nach Rudolf Zurmühl ist die von Gauß begründete Ausgleichsrechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate eine der ältesten Anwen-

Abb. 14 **Das internationale Einheitensystem (SI)**
SI = Système International d'Unités

Potenz		Zahl	Name	Zeichen	Größenbezeichnung
10^{24}	=	1 000 000 000 000 000 000 000 000	Yotta	Y	Quadrilliion
10^{21}	=	1 000 000 000 000 000 000 000	Zetta	Z	Trilliarde
10^{18}	=	1 000 000 000 000 000 000	Exa	E	Trillion
10^{15}	=	1 000 000 000 000 000	Peta	P	Billiarde
10^{12}	=	1 000 000 000 000	Tera	T	Billion
10^{9}	=	1 000 000 000	Giga	G	Milliarde
10^{6}	=	1 000 000	Mega	M	Million
10^{3}	=	1 000	Kilo	k	Tausend
10^{2}	=	100	Hekto	h	Hundert
10^{1}	=	10	Deka	da	Zehn
		1			
10^{-1}	=	0,1	Dezi	d	Zehntel
10^{-2}	=	1,01	Zenti	c	Hundertstel
10^{-3}	=	0,001	Milli	m	Tausendstel
10^{-6}	=	0,000 001	Mikro	µ	Millionstel
10^{-9}	=	0,000 000 001	Nano	n	Milliardstel
10^{-12}	=	0,000 000 000 001	Piko	p	Billionstel
10^{-15}	=	0,000 000 000 000 001	Femto	f	Billiardstel
10^{-18}	=	0,000 000 000 000 000 001	Atto	a	Trillionstel
10^{-21}	=	0,000 000 000 000 000 000 001	Zepto	z	Trilliardstel
10^{-24}	=	0,000 000 000 000 000 000 000 001	Yocto	y	Quadrillionstel

dungen mathematischer Statistik. Diese Methode dient dazu, für mit Messfehlern behaftete Beobachtungswerte möglichst gute Näherungen zu finden. Die Bestimmung von Ausgleichsgeraden und -kurven nach dem Prinzip der kleinsten Quadrate hat in der Fehler- und Ausgleichsrechnung wichtige Anwendungen. Die Bedeutung dieser Methode wurde von Gauß klar erkannt. Dank dieser Methode gelang es ihm mit den wenigen Beobachtungen des Astronomen Piazzi die Ephemeride des kleinen Planeten Ceres zu berechnen. So erklärt sich, dass die genannte Methode häufig das Standardverfahren zur Bestimmung der Kurvenparameter war.

Wenn für eine anzupassende Kurve Hinweise für ein mögliches Modell fehlen, dann sind Splinefunktionen – ein verhältnismäßig junges Gebiet – hilfreich. Als Beginn der Entwicklung der Spline-Funktionen gilt eine im Jahr 1946 von Isaak Schoenberg (1903 - 1990) vorgestellte Arbeit, in der es u. a. heißt: „A spline is a simple mechanical device for drawing smooth curves." (Part A, Seite 67). Nach dem Lexikon der Mathematik traten glatte Splines erstmalig in einer Arbeit von L. Collatz und W. Quade 1938 im Zusammenhang mit der Behandlung von Fourierreihen auf.

Anwendung von Ausgleichs-Splines

Um zu zeigen, wie gut eine Spline-Funktion die „wahre" Funktion wiedergibt, wurde eine Funktion verändert (oder wenn man will „verschmutzt"). Dazu wurden Nachkommastellen der Zahl π zur Erzeugung normalverteilter Zufallszahlen z_i (Erwartungswert 0 und Standardabweichung 1) verwendet. Diese dienten dann der Gewinnung von Messwerten $y_i = 15\ e^{-x_i^2} + z_i$, $i = 0, 1, \dots 100$. Abbildung 15 zeigt die Rohdaten und deren Ausgleichung.

Das Spline-Verfahren bietet die Möglichkeit, die Stärke des Ausgleichs durch zwei Parameter zu steuern.

Vorzug interpolierender Spline-Funktionen

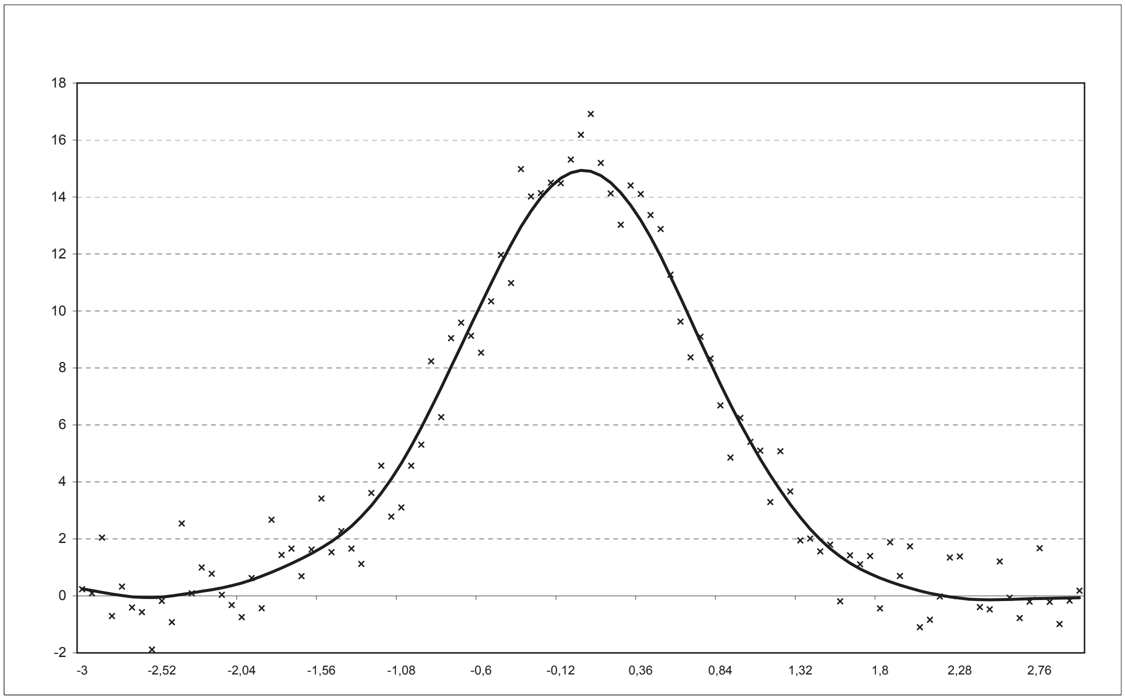
Die Überlegenheit der Spline-Interpolation zeigt sich an dem Beispiel in der Abbildung 16. Dort wurden die Quadratzahlen für die Zahlen von 1 bis 17 dargestellt, wobei der Wert für $x = 9$ auf 87 verändert wurde (statt 81), um zu zeigen, wie ein Interpolationspolynom und eine Spline-Interpolation darauf reagieren. Das Bild spricht für sich: die Splineinterpolation zeigt sich relativ „robust", während das Newton'sche Interpolationspolynom vom Grad 7 stark oszilliert.

In Abbildung 17 wurde die Deklination des Mondes vom Mai 2000 (Quelle: Kosmos Himmelsjahr 2000) für Zwecke der Interpolation benutzt. Von den 31 Daten für Mai wurden elf Knoten ausgewählt, und zwar: 1, 4, 7, …, 31). Damit soll gezeigt werden, wie eine Splineinterpolation und das Interpolationsverfahren nach Newton die fehlenden Werte schätzen. Die interpolierten Werte sind in beiden Fällen zufriedenstellend.

Glättung einer Zeitreihe mittels Spline-Funktionen

Glättende oder ausgleichende Spline-Funktionen lassen sich

Abb. 15

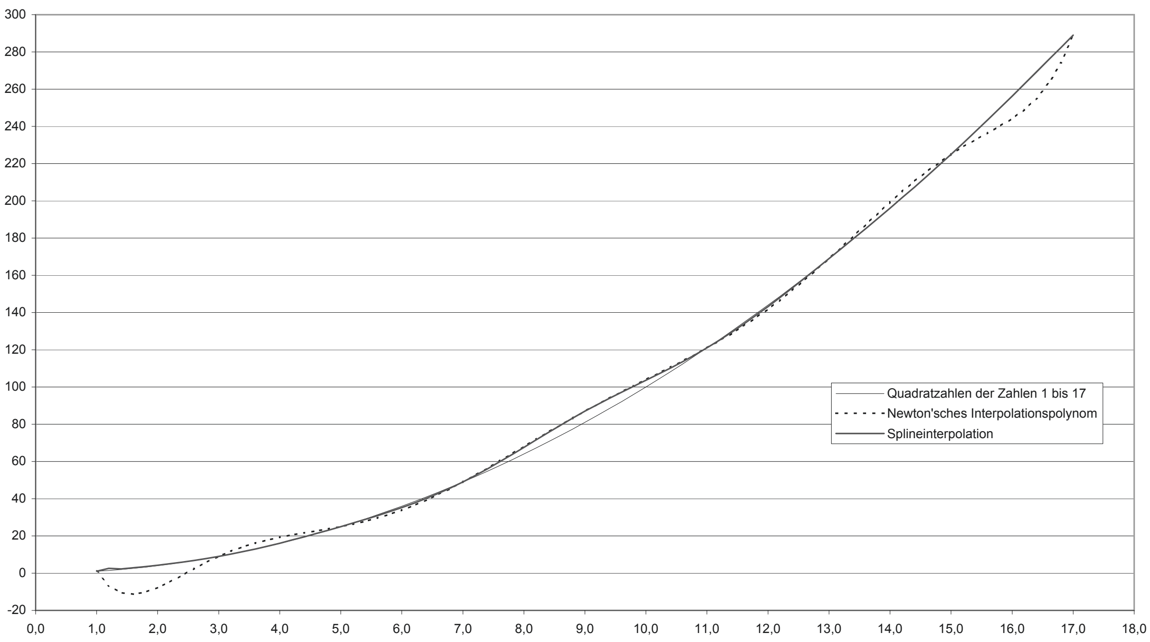


Glättung einer veränderten („verschmutzten") Funktion mittels eines Ausgleichs-Spline.

auch zur Darstellung der glatten Komponente einer Zeitreihe einsetzen. Abbildung 18 gibt hierfür ein Beispiel anhand von fiktiven Monatsdaten. Zusätzlich wurde in dieses Schaubild die Veränderung der glatten Komponente gegenüber dem jeweiligen Vorjahresmonat mit aufgenommen.

Im Heft 8/2007 der Zeitschrift Bayern in Zahlen wurden nach dem Spline-Verfahren geglättete Werte für den Auftragseingang im Verarbeitenden Gewerbe Bayerns abgebildet.

Abb. 16



Dargestellt wurden die Quadrate der Zahlen 1 bis 17, wobei der Wert für x = 9 verändert wurde (nicht 81, sondern 87). Es ist bemerkenswert, wie ein interpolierendes Polynom und eine interpolierende Spline-Funktion darauf reagieren.

Abb. 17

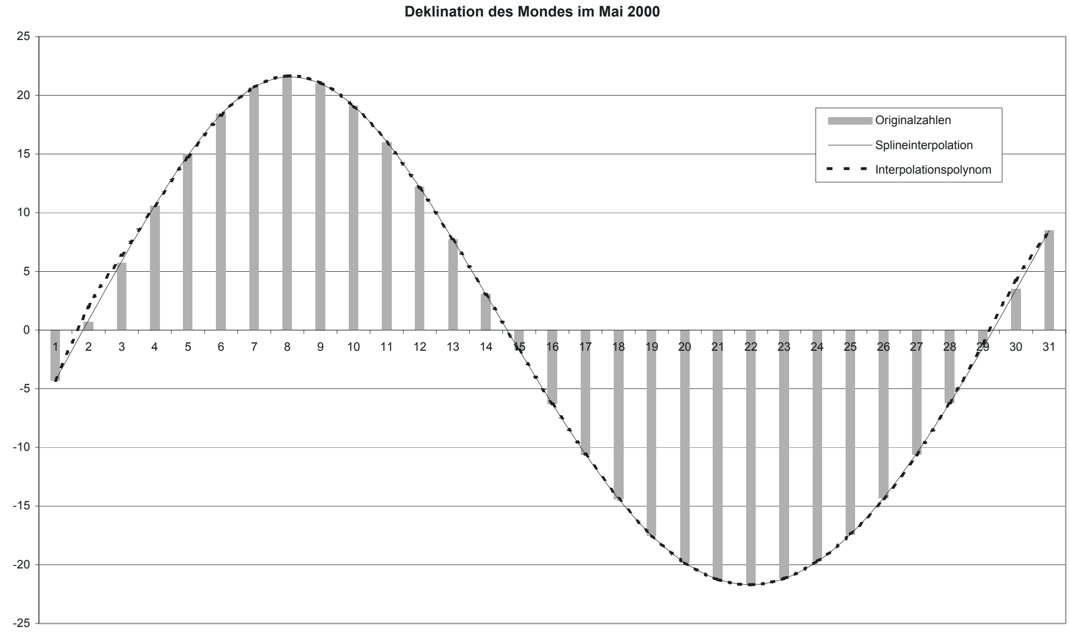
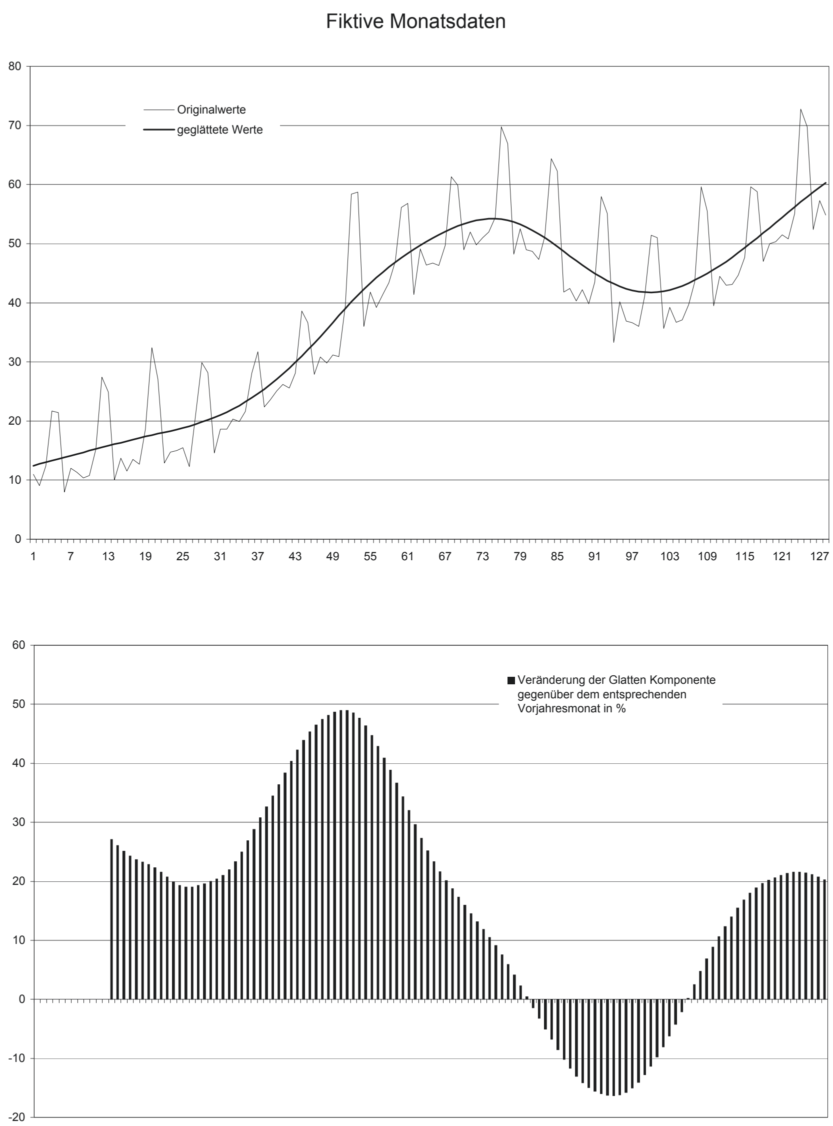

Deklination des Mondes im Mai 2000
Originalzahlen
Splineinterpolation
Interpolationspolynom

Abb. 18


Fiktive Monatsdaten
Originalwerte
geglättete Werte
Veränderung der Glatten Komponente gegenüber dem entsprechenden Vorjahresmonat in %

Glättung der rohen Sterbewahrscheinlichkeiten

Gegen Ende des 19. Jahrhunderts wurde die Glättung der rohen Sterbewahrscheinlichkeiten zum Teil noch abgelehnt. Inzwischen begegnet man bei der Sterblichkeitskurve dem Spiel des Zufalls durch Glättung der rohen einjährigen Sterbewahrscheinlichkeiten. Das Material für eine Sterbetafel ist mit zufälligen Abweichungen behaftet. Aufgrund der geringen Besetzungszahlen bestimmter Altersjahre sind die rohen Werte weniger zuverlässig als die von anderen Altersjahren.

Mitte des 20. Jahrhunderts hielt man es für vorteilhaft, die ganze Sterbetafel vom Alter 0 bis 100 nach derselben Methode ausgleichen zu können.[6] Dies war damals aber nicht durchführbar und so erfolgte die Ausgleichung der einjährigen Sterbewahrscheinlichkeiten nach verschiedenartigen Verfahren. Ein Nachteil dabei ist, dass an den Endpunkten der Teilbereiche Bruchstellen entstehen. Zum Beispiel mussten bei der bayerischen Sterbetafel 1970/72 noch drei verschiedene Glättungsverfahren eingesetzt werden, die Altersjahre 1 bis 3 blieben unbehandelt. Für die Altersjahre 20 bis 80 (männliches Geschlecht) bzw. 16 bis 80 (weibliches Geschlecht) kam die 15-Punkte-Formel von Spencer $\frac{1}{320}$ (-3, -6, -5, 3, 21, 46, 67, 74, 67, …), die Faltung von vier Filtern, zum Einsatz. Dieser gleitende Durchschnitt stellt einen polynomialen Trend bis zur dritten Ordnung unverzerrt dar. Die Schätzung der glatten Komponente mit Hilfe gleitender Durchschnitte hat den Nachteil, dass am aktuellen Rand keine Schätzwerte berechnet werden können.

Die bahnbrechende Entwicklung der elektronischen Datenverarbeitungsanlagen ermöglichte die Anwendung des Splineverfahrens. Mit den heutigen Rechenmöglichkeiten ist die Rechenzeit zur Berechnung einer Splinefunktion mit etwa 100 Stützpunkten unwesentlich. So konnten die einjährigen Sterbewahrscheinlichkeiten in „einem Guss“ einer Glättung unterworfen werden.

Bei der Erstellung der bayerischen Sterbetafeln 1986/88 und 1996/98 wurden bereits Spline-Funktionen (nach Christian H. Reinsch) eingesetzt. Siehe hierzu die Hefte 9/1991 und 8/2001 sowie 5/2002 der Zeitschrift „Bayern in Zahlen“. Außerdem wurde die jährliche Entwicklung der mittleren Lebenserwartung eines bayerischen Neugeborenen (männlich bzw. weiblich) für die Jahre 1895 bis 1997 mittels einer interpolierenden Splinefunktion graphisch dargestellt (siehe Schaubild 3 in Heft 8/2001 von „Bayern in Zahlen“).

Karl-August Schäffer machte auf die Vorzüge des Spline-Verfahrens bei der Glättung der rohen Sterbewahrscheinlichkeiten aufmerksam (Schäffer, Karl-August: Ausgleichung durch Splinefunktionen und ihre Anwendung auf Sterbetafeln. Allgemeines Statistisches Archiv, Heft 14 (Splinefunktionen in der Statistik), S. 24 ff.)

Um rasch einen ersten Eindruck über eine Sterblichkeitskurve zu gewinnen, kann auf das Angebot an mechanischen Ausgleichsformeln zur Glättung der rohen Sterbewahrscheinlichkeiten von Walter Swoboda zurückgegriffen werden. Zum Beispiel liefert die von ihm entwickelte 21-Punkte-Formel geglättete Werte für die Altersjahre 11 bis 89. Am oberen Ende der Kurve kann man sich mit einer Extrapolation (basierend auf einer parabolischen Regression oder der Berechnung eines logistischen Trends) weiterhelfen. Am unteren Rand gestalten sich dagegen die Dinge allerdings nicht mehr so einfach.

6 Die Nulljährigen sind als Sonderfall nicht in die Glättung einzubeziehen.

Literaturnachweis

Bauer, Ludwig: Hermanns „Lehrbuch der Arithmetik und Algebra zum Gebrauch in Schulen und beim Selbstunterricht“. In: Friedrich Benedikt Wilhelm von Hermann (1795 -1868): Ein Genie im Dienste der bayerischen Könige. Politik, Wirtschaft und Gesellschaft im Aufbruch. Hrsg. von Manfred Pix. München 1999. S. 497 ff.

Chuquet, Nicolas: Renaissance mathematician: a study with extensive transl. of Chuquet's mathemat. manuscript completed in 1484 / ed. by Graham Flegg … Dordrecht u.a. 1985.

Cicero, Marcus Tullius: Tusculanae disputationes = Gespräche in Tusculum / M. Tullius Cicero. Übersetzt und hrsg. von Ernst Alfred Kirfel. Stuttgart 1997.

Euler, Leonhard: Leonhard Eulers Einleitung in die Analysis des Unendlichen (1) / aus dem Latein. übers. und mit Anm. und Zusätzen begleitet von Johann Andreas Christian Michelsen. Berlin 1788.

Gericke, Helmuth: Mathematik im Abendland: Von den römischen Feldvermessern bis zu Descartes. Berlin u. a. 1990.

Hanke, Georg: Philipp Apian. In: Porträts aus acht Jahrhunderten. Süddeutscher Verlag, München 1978. S. 69 (=Unbekanntes Bayern; 3).

Ifrah, Georges: Universalgeschichte der Zahlen. Frankfurt/Main … 1991.

Kaunzner, Wolfgang: Zum Stand von Astronomie und Naturwissenschaften im Kloster Reichenbach. In: 875 Jahre Kloster Reichenbach am Regen. München 1993.

Leibniz, Gottfried Wilhelm: Hauptschriften zur Versicherungs- und Finanzmathematik. Hrsg. von Eberhard Knobloch und J.-Matthias Graf von der Schulenburg. Berlin 2000.

Pölnitz, Götz von: Martin Behaim. In: Porträts aus acht Jahrhunderten. Süddeutscher Verlag. München 1978 (=Unbekanntes Bayern; 3).

Reinsch, Christian H.:
- Smoothing by Functions. In: Numerische Mathematik. Bd. 10. 1967, p. 177 ff.
- Smoothing by Spline-Functions II. Numerische Mathematik. Bd. 16. 1971, p. 451 ff.

Schoenberg, Isaak Jakob: Contributions to the problem of approximation of equidistant data by analytic functions. Part A – On the problem of smoothing or graduation. A first class of analytic approximation formulae. In: Quarterly of Applied Mathematics 4 (1946). Providence (Rhode Island) 1946, p. 45 - 99.

Schoenberg, Isaak Jakob: Contributions to the problem of approximation of equidistant data by analytic functions. Part B – On the problem of osculatory interpolation. A second class of analytic approximation formulae. In: Quarterly of Applied Mathematics 4 (1946). Providence (Rhode Island) 1946. p. 112-141.

Swoboda, Walter: Gedanken zur Ausgleichung von Sterbetafeln. In: Jahrbücher für Nationalökonomie und Statistik, Bd. 214/III, 1995. Nachdruck: Zeitschrift des Bayerischen Landesamts für Statistik und Datenverarbeitung, Bayern in Zahlen, 129 (52.) Jahrgang, 1998/3, S. 103 ff.

Stevin, Simon: La Pratique d'Arithmetique. In: L'Arithmetique. Leyden 1585.

Wolf, Rudolf: Geschichte der Astronomie. München 1877.