Ein Blick in die Historie der Wahrscheinlichkeitsrechnung

Helmut Hirtz

Nach Pierre Simon de Laplace (1749 - 1827) sind die wichtigsten Fragen im Leben zum größten Teil nur Probleme der Abschätzung von Wahrscheinlichkeiten. Ereignisse, die im Einzelfall völlig unbestimmt und unsicher sind, werden nach den Gesetzen der Wahrscheinlichkeitslehre in der Masse überschaubar und können abgeschätzt werden. Das trifft auch für die Abschätzung der mittleren Lebenserwartung einer Person zu. Von dieser Größe wird zum Beispiel maßgeblich die Höhe einer Leibrente geprägt. Da das Sterbealter eines Menschen unbekannt ist, muss man sich auf Wahrscheinlichkeiten stützen, stellte Gottfried Wilhelm Leibniz (1646 - 1716) schon vor mehr als 300 Jahren fest.

Es ist bemerkenswert, dass die Lebensversicherung, die sich aus dem mittelalterlichen Leibrentengeschäft entwickelte, zu den ersten Anwendungen der Wahrscheinlichkeitsrechnung im Wirtschaftsleben zählt. Die Versicherer ließen das Alter und die Lebenserwartung in ihre Kalkulation einfließen.

Die Wurzeln der Wahrscheinlichkeitstheorie finden sich im 17. Jahrhundert, als aristokratische Glücksspieler bei Mathematikern um Rat nach Gewinnstrategien suchten. In jenem Jahrhundert vollzog sich in der Mathematik ein gewaltiger Schub im Umfeld umwälzender politischer Ereignisse. Mitglieder der Familie Bernoulli trugen nennenswert mit dazu bei, dass die Wahrscheinlichkeitstheorie ihrer Geburtsstätte in den Spielhöllen entrann und zu einer angesehenen Lehre mit zahlreichen Anwendungsmöglichkeiten heranwuchs. „Nirgendwo hat der Mensch mehr Scharfsinn an den Tag gelegt als in seinen Spielen" heißt es in einem Brief von Leibniz an Pascal.

Jakob Bernoulli (1655 - 1705) wandte Betrachtungen zur Wahrscheinlichkeitsrechnung nicht nur auf Glücksspiele, sondern auch auf Todesfälle an. Bei der Sterblichkeitskurve begegnet man heutzutage dem Spiel des Zufalls durch Glättung der rohen Sterbewahrscheinlichkeiten. Das Material für eine Sterbetafel ist mit zufälligen Abweichungen behaftet. Aufgrund der geringen Besetzungszahlen bestimmter Altersjahre sind die rohen Werte weniger zuverlässig als die von anderen Altersjahren.

Nach der Wahrscheinlichkeitstheorie ist die Dauer eines menschlichen Lebens ebenso wie das Ziehen einer Karte aus einem Kartenspiel ein Zufallsereignis. Man spricht von der Chance, im Lotto zu gewinnen, oder dem Risiko, ein Unglück zu erleiden. Die Wahrscheinlichkeit ist eine Zahl, die nicht kleiner als Null und nicht größer als Eins sein kann: $0 \leq W \leq 1$. Wahrscheinlichkeit wird auch als Mathematik des Zufalls bezeichnet.

Wer investiert, muss Annahmen über die Zukunft treffen und geht dabei Risiken ein. Die Vergangenheit ist immer Gewissheit, die Zukunft Wahrscheinlichkeit. Der Zufall als Mitgestalter der Zukunft? Was die Zukunft bringt, hängt auch von den richtigen Weichenstellungen in Vergangenheit

und Gegenwart ab. Das alte Diktum „In dieser Welt gibt es nichts Sichereres als den Tod und die Steuern“ stammt bekanntlich von Benjamin Franklin (1706 - 1790).
Vormals war manche Entscheidung von Aberglauben und Empirie bestimmt. Das Handeln muss dem Denken folgen, war ein Grundsatz von Cicero (106 - 43 v. Chr.). In seinem Werk *De off.* (Vom pflichtgemäßen Handeln) heißt es (I,2,7): „Denn jede Unterweisung, die auf wissenschaftlicher Grundlage über irgendeinen Gegenstand entworfen wird, muss ausgehen von der Begriffsbestimmung, damit verstanden werde, was das sei, worüber die Erörterung geht.“
Auf den Philosophen Baruch (Benedictus) de Spinoza (1632 - 1677) geht der Satz zurück: „Es ist richtig, dass wir im Leben vieles auf Grund bloßer Vermutungen tun, aber es ist falsch, dass unsere Ideen bloß auf Vermutungen beruhen.“ Eine Lebensregel des englischen Mathematikers und Philosophen Bertrand Russel (1872 - 1970) lautete: „Auch wenn alle einer Meinung sind, können doch alle unrecht haben.“
Wenngleich das Vermuten oder Mutmaßen eine uralte menschliche Tätigkeit darstellt, so dauerte es doch, bis die ersten fundierten Abhandlungen zu diesem Thema entstanden, so das postume Werk von Jakob Bernoulli *Ars Conjectandi* (Kunst der Mutmaßung) von 1713.
Ausgewählte historische Schriften zur Wahrscheinlichkeitsrechnung:

1657 Christiaan Huygens *De ratiociniis in ludo aleae*
1713 Jakob Bernoulli *Ars Conjectandi, opus posthumum*
1718 Abraham de Moivre *The Doctrine of Chances*
1812 Pierre Simon de Laplace *Théorie analytique des probabilités*
1814 *Essai philosophique sur les probabilités*
1837 Siméon Denis Poisson *Recherches sur la probabilité des jugements en matière criminelle …*

Eine wichtige Anwendung der Wahrscheinlichkeitsrechnung, die sog. *Methode der kleinsten Quadrate*, ist Carl Friedrich Gauß (1777 - 1855) zu verdanken. Die Normalverteilung, die auf De Moivre (1667 - 1754) zurückgeht, ist eine wichtige theoretische Häufigkeitsverteilung der statistischen Methodenlehre. De Moivre begann seine Überlegungen auf dem Gebiet der Glücksspiele. Unabhängig von ihm wurde dieses Gesetz von Carl Friedrich Gauß bei Untersuchungen der Verteilung von Messfehlern hergeleitet. Ob sie zur Berechenbarkeit der Finanzmärkte taugt, wurde im Passus „Bemerkenswertes zu Geldgeschäften und die Anfänge des Versicherungswesens“ (s. Bayern in Zahlen 11/2007) erörtert.
Als Begründer der Hypothese des sogenannten „Random Walk“ gilt heute Louis Bachelier (1870 - 1946). Er betrachtete den Verlauf eines Börsenkurses als Zufallsprozess. Seine 1900 vorgelegte Dissertation *Théorie de la Spéculation* (Theorie der Spekulation), die damals in ihrem Wert verkannt wurde, ist von Paul A. Samuelson 1956 wieder entdeckt worden. Albert Einstein (1879 - 1955) war 1905 nicht bekannt, dass bereits fünf Jahre früher Bachelier einen gehörigen Teil der mathematischen Ergebnisse zur Brown'schen Bewegung beschrieb.

Bei einem Streifzug durch die Geschichte der Wahrscheinlichkeitsrechnung ist die Erwähnung des arithmetischen Dreiecks unausweichlich. Dieses wurde erst gegen Ende des 17. Jahrhunderts zum Ausgangspunkt für drei Zweige der Mathematik, darunter die Wahrscheinlichkeitsrechnung. Aufmerksamkeit verdienen in diesem Kontext die sagenumwobenen Fibonacci-Zahlen. Die Nützlichkeit der in Wahrscheinlichkeitsaufgaben häufig auftretenden Zahl e wird an einem klassischen Beispiel (Problem der vertauschten Briefe) vorgeführt.
Einen bedeutenden Beitrag zur Entwicklung der Wahrscheinlichkeitstheorie leisteten im 19. Jahrhundert P.L. Tschebyschow (1821 - 1894), A.A. Markow (1856 - 1922), A.M. Ljapunow (1857 - 1918), um nur einige Namen zu nennen.
Die Wahrscheinlichkeitsrechnung wurde im Lauf ihrer Entwicklung zu dem Zweig der Mathematik, der sich mit der Aufdeckung der Gesetzmäßigkeiten von zufälligen Ereignissen befasst.
Die heute allgemein angenommene axiomatische Definition der Wahrscheinlichkeit stammt von Andrej N. Kolmogorov (1903 - 1987). Er begründete sie in seinem Buch „Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung" (Erstveröffentlichung Berlin 1933 in deutsch, 1936 in russisch).
Schon Thomas Bayes (1702 - 1761) befasste sich mit Fragen der Wahrscheinlichkeit für die Richtigkeit von Hypothesen. Antoine de Condorcet (1743 - 1794) erkannte die Möglichkeit nichteindeutiger Entscheidungen bei Verwendung des Prinzips relativer Mehrheiten.
Die statistische Testtheorie wurde von E.S. Pearson und J. Neyman um 1930 entwickelt. Prüfverfahren sind hilfreich, wenn sich die Frage stellt, ob die aufgetretenen Abweichungen zufälliger oder wesentlicher Natur sind. Sie sind meist auf Grund der Annahme einer normal verteilten Grundgesamtheit entwickelt worden.
Die moderne Stichproben-Theorie geht zum großen Teil auf die Untersuchungen von Sir Ronald Fisher (1890 - 1962) zurück. Er führte die Zufallsauswahl ein. Fisher beschrieb komplexere Zufallsanordnungen anhand von Blöcken und lateinischen Quadraten und begründete die Methode der Varianzanalyse, bei der die Daten aus vergleichenden Zufallsexperimenten analysiert werden. Es ist wissenswert, dass die Theorie der Stichproben in engem Zusammenhang mit der Praxis biologischer und besonders landwirtschaftlicher Experimente entwickelt wurde. Die Entwicklung der Varianzanalyse von Fisher wurde erst durch die Ableitung der F-Verteilung durch George W. Snedecor möglich. Diese Verteilung wurde zu Ehren Fisher's F-Verteilung genannt.
Viele Verteilungen spielen in der Stichproben-Theorie (Zufallsstichproben) eine Rolle, wie zum Beispiel die Binomialverteilung, Poissonverteilung, Hypergeometrische Verteilung, Multinomialverteilung und die Normalverteilung. Stichproben können bei zwei Fragestellungen eine Hilfestellung geben: Sei es die Schätzung gewisser Parameter der Merkmalsverteilung einer Grundgesamtheit. Oder die Überprüfung von Hypothesen bezüglich der Verteilung der Gesamtheit bzw. bestimmter Parameter einer Verteilung.

Weissagung und Lebensschicksal
Logik und Analyse waren in der Antike nicht die einzigen Entscheidungshilfen. Mancher stützte sich auf das berühmte Orakel von Delphi, so auch der letzte König von Lydien, Krösus (reg. um 560 - 546 v. Chr.). Die Weissagung des delphischen Orakels, er werde, wenn er den Halys überschreite, ein großes Reich zerstören, erfüllte sich an ihm selbst: 546 v. Chr. wurde er von dem persischen König Kyros II. besiegt.

Kairos war in der Anschauung der alten Griechen der Augenblick, der dem Menschen schicksalhaft entgegentritt, aber von ihm auch genutzt werden muss.

Als die ersten Propheten galten priesterliche Astronomen, die die nächste Mond- oder Sonnenfinsternis voraussagen konnten.

Den Schleier vor der Zukunft zu lüften, ist ein alter Menschheitstraum. So ließ die Ungewissheit der Zukunft von jeher einen Bedarf an Einschätzungen künftiger Ereignisabläufe aufkommen. Bei Etruskern und Römern war Haruspex der Wahrsager.

Die weissagende Sibylle aus der Antike wird durch den lateinischen Satz charakterisiert: „Cum taetra prodigia nuntiata erant, decemviri libros Sibyllinos adire iubebantur.“ (Wenn „=sooft“ schlimme Vorzeichen gemeldet wurden, wurden die Dezemvirn [lat. „Zehnmänner“] beauftragt, die Sibyllinischen Bücher einzusehen.)

Zur Entscheidungsfindung diente und dient das Los, ein vom menschlichen Willen unabhängiges Mittel der Schicksalsbefragung. Einem klassischen Beispiel begegnet man im N.T. (Joh. 19,24): „... und über mein Gewand warfen sie das Los (Ps 22,19)“.

„... sich über nichts zu wundern, wenn es eingetreten ist, und von nichts vor seinem Eintreten zu glauben, es könne nicht geschehen. >Deshalb müssen alle besonders dann, wenn das Glück am größten ist, bei sich bedenken, wie sie schlimme Trübsal ertragen können. Auf Gefahren und Unglück soll man bei der Rückkehr von einer weiten Reise gefasst sein, …<“ schreibt Cicero in *Tusculanae disputationes* (III 14,30).

In den *Annalen* (VI,22) von Tacitus findet sich der Satz: „Wenn ich von diesen und ähnlichen Begebenheiten höre, weiß ich nicht, wie ich mich entscheiden soll, ob in dem Ablauf des Menschenlebens das Schicksal oder eine unabänderliche Notwendigkeit oder reiner Zufall waltet.“

Erwähnenswert ist eine Anweisung Napoleons an seinen Kabinettssekretär: „Berichten Sie mir täglich, auch wenn nichts vorgefallen ist; es kann von Wichtigkeit sein zu wissen, dass sich nichts zugetragen hat, dass Erwartungen ausgeblieben sind.“

Aleatorische Verträge
Als aleatorische Verträge (vom lat. alea „Würfel“) gelten Verträge, bei denen der Zufall entscheiden soll, für wen das Geschäft einen Vorteil oder Nachteil bringen wird; zum Beispiel Wette, Spiel, Termingeschäft.

Zum Begriff Spekulation
Der Begriff Spekulation wird oft mit den Finanzmärkten in Verbindung gebracht. Was bedeutet Spekulation überhaupt?

In einer staatlichen Untersuchung des Börsenwesens in Deutschland im 19. Jahrhundert war zu lesen: „Spekulation ist diejenige geistige Tätigkeit, welche aus den Erfahrungen der Vergangenheit und der Beobachtung der Gegenwart einen Schluss auf die Zukunft zieht.“

Der Investmentbankier Gerald M. Loeb definierte den Begriff Spekulation wie folgt: „Zwischen Glücksspiel und Spekulation besteht ein großer Unterschied. Glücksspiel beinhaltet ein Risiko, das man nicht beeinflussen kann. Spekulation, wenn sie richtig betrieben wird, bedeutet, dass man seine Intelligenz und sein Urteilsvermögen für die Entdeckung einer Chance und ihre Untersuchung einsetzt.“

Der Philosoph Peter Koslowski drückt sich so aus: „Spekulation sei nicht nur ein Spiel, sondern der nützliche Versuch, sich auf künftige Unsicherheiten einzustellen.“, siehe F.A.Z. vom 1. Juni 2002, Seite 15.

Von Ludwig Bamberger (1823 - 1899), finanzpolitischer Berater Bismarcks, vertrauter Ratgeber Friedrichs III. und Mitbegründer der Deutschen Bank, stammt folgendes Zitat: „Wenn neue Projekte vorgelegt wurden und, wie dies regelmäßig geschah, die Vermittler auf dem Papier die schönsten für alle Eventualitäten abgezirkelten Berechnungen zur Befriedigung meines Onkel vorgelegt hatten, und wenn alle meine Einwürfe beseitigt waren, dann pflegte ich zu sagen: >Wir rechnen ohne das Unvorhergesehene.< Worauf er: >Was kann da noch Unvorhergesehenes kommen?< - Worauf ich: >Wenn ich's sagen könnte, wäre es nicht das Unvorhergesehene.<", vgl. Koehler Benedikt: Ludwig Bamberger: Revolutionär und Bankier. Stuttgart 1999, S. 76.

Der Spieltisch als Geburtsort der Wahrscheinlichkeitsrechnung

Glückspiele waren immer eine beliebte Beschäftigung der Menschen. Heutzutage geben die Amerikaner für Glücksspiele mittlerweile mehr Geld aus als für Kino, DVD, CD und Bücher zusammen.

„Das Spiel als eine Herausforderung an den Zufall liegt in der menschlichen Natur" schrieb Heinrich Hoffmann in seinem *Kur- und Badebuch* (zitiert nach Bayer. Staatszeitung – Unser Bayern 3/2002).

Der römische Schriftsteller Sueton (um 70 bis nach 140) berichtet von einem Epigramm, das da lautet: „Nachdem er zweimal zur See besiegt seine Schiffe verloren hatte, probiert er ständig sein Glück im Würfelspiel, um wenigstens einmal zu siegen." (*Aug*. 70,2).

In der Renaissance waren Würfelspiele ein sehr beliebter Zeitvertreib. Die Glücksspiele (Hasardspiele) waren es, die im 16. Jahrhundert den Boden für die Wahrscheinlichkeitsrechnung bereiteten (géométrie du hazard oder aleae geometria).

Wenn der Spieltisch der Geburtsort der Wahrscheinlichkeitstheorie war (Oskar Anderson sen.), dann stand er wohl in Italien. Ein Beitrag von Jochen Zwick in der F.A.Z. vom 4. August 1999 trug den Titel *Wer nicht ins Casino geht, taugt für kein Amt* mit dem Untertitel *Im Glücksspiel versicherte sich Venedigs Adel seiner Selbstsicherheit und seiner Rolle*.

Rudolf Haussner nennt sehr frühe Untersuchungen zu Glückspielen: Libri berichtet in seiner *Histoire des sciences mathématiques en Italie*, dass sich in einem 1477 in Venedig gedruckten Kommentar zu Dante's *Divina Commedia* [Göttliche Komödie] Untersuchungen über die Häufigkeit der mit drei Würfeln möglichen Würfe finden.
Luca Pacioli (1445 - 1514) stellte um 1500 die Frage, wie der Spieleinsatz gerecht zu verteilen ist, wenn ein Spiel vorzeitig beendet werden muss.

Von Geronimo Cardano (1501 - 1576) stammt eine Schrift, die sich mit Glücksspielen befaßte. Sie erschien um 1526 mit dem Titel *Liber de Ludo aleae* und behandelte Würfelspiele.

Ein italienischer Edelmann fragte Galilei (1564 - 1642), warum beim Spiel mit drei Würfeln die Gesamtzahl der Augen häufiger 10 als 9 sei. Daraufhin fertigte Galilei eine Tabelle mit den 216 $= 6^3$ Möglichkeiten an (nach der Schrift *Sopra le Scoperte dei Dadi* die erstmals im Jahr 1718 veröffentlicht wurde).

Bekannter ist die Geschichte von Antoine Chevalier de Méré. Er legte Blaise Pascal (1623 - 1662) im Jahr 1654 eine Reihe von Fragen vor, die sich auf Erfolgschancen gewisser Würfelspiele bezogen. Hierüber korrespondierte Pascal mit Pierre de Fermat (1601 - 1665). Der niederländische Physiker und Mathematiker Christiaan Huygens (1629 - 1695) hörte von den Gesprächen über die Würfelspiele zwischen Pascal und Fermat und wurde so angeregt, sich mit diesem Thema zu befassen. Huygens, der den Inhalt der Gespräche zwischen Pascal und Fermat nicht kannte, verfasste 1656 eine Schrift. Frans van Schooten übersetzte dieses Werk in das Lateinische und nahm sie unter dem Titel *De ratiociniis in ludo aleae* in seine *Exercitationes mathematicae* (1657) auf. Mit dieser Schrift von Huygens wurde die Mathematik um einen neuen Zweig, die sog. Wahrscheinlichkeitsrechnung, bereichert (Rudolf Wolf in seiner *Geschichte der Astronomie* aus dem Jahr 1877).

Diese Abhandlung von Huygens[1] – einer der bedeutendsten und vielseitigsten Physiker und Mathematiker seiner Epoche – blieb lange die einzige Einführung in die Wahrscheinlichkeitslehre. Nebenbei sei erwähnt, dass Gottfried Wilhelm Leibniz nach einer Begegnung mit Huygens sich veranlasst sah, seine Kenntnisse in der höheren Mathematik zu vertiefen. Aus dem Lernenden wurde ein Meister: 1675 erfand Leibniz die Infinitesimalrechnung auf eigenem Weg und unabhängig von Newtons Fluxionsrechnung.

Chrstiaan Huygens und Jakob Bernoulli die Begründer der Wahrscheinlichkeitstheorie

Im Wesentlichen begründeten die Wahrscheinlichkeitstheorie Christiaan Huygens (1629 - 1695) und Jakob Bernoulli (1655 - 1705). Während Huygens sich mit Glücksspielen befaßte, spielte für Jakob Bernoulli der Begriff der Wahrscheinlichkeit auch im menschlichen Leben und im Rechtswesen eine Rolle. Einzufügen ist hier die Wette von Blaise Pascal

1 Anlässlich der planmäßigen Landung der europäischen Raumsonde Huygens auf dem Saturnmond Titan am 14. Januar 2005 nach einem rund siebenjährigen Flug, sei an die Entdeckung des hellsten Saturnmonds durch Christiaan Huygens im Jahr 1655 erinnert.

(1623 - 1662). Nach dessen Auffassung läuft der Glaube an Gott auf eine Wette hinaus und er begründete dies in Anlehnung an die Wahrscheinlichkeitsrechnung.

Das für die Wahrscheinlichkeitsrechnung bedeutende Werk von Jakob Bernoulli (1655[2] - 1705), das unvollendet blieb, wurde 1713 posthum veröffentlicht. Der Titel dieser Schrift lautete *Ars Conjectandi* (Kunst der Mutmaßung). In diesem Werk taucht auch die Formulierung „Ars Conjectandi sive Stochastice“ auf. Der letzte Begriff stammt vom Griechischen Verbum στοχάζεσθαι (stocházesthai) [u. a. das Ziel treffen; erraten, vermuten, ahnen]. Das Werk Bernoullis befasste sich nicht nur mit Glücksspielen. So trägt der vierte Teil die Überschrift „Anwendung der vorhergehenden Lehre auf bürgerliche, sittliche und wirtschaftliche Verhältnisse“.

Kunst des Mutmaßens

Im täglichen Leben fußen viele Tätigkeiten auf Vermutung. Dabei mögen gewisse Entscheidungen auch nur intuitiv getroffen worden sein. Viele seiner Entscheidungen hat der Mensch von den Bahnen der Himmelskörper lenken lassen.

In der Seefahrt wurde die genaue Bestimmung des Längengrades erst im 18. Jahrhundert möglich (Seeuhr von John Harrison). In diesem Kontext ist ein Bericht von Plinius d. Ä. (23 - 79) erwähnenswert: „Nach den Sternen richtet man sich hier bei der Schiffahrt nicht; das Siebengestirn sieht man nicht mehr. <Viel mehr> nimmt man Vögel mit, die man von Zeit zu Zeit fliegen lässt und deren nach dem Land strebendem Flug man dann folgt. Auch fährt man höchstens vier Monate im Jahr zur See.“, vgl. Naturkunde VI Geographie Asien XXIV 83 (Hrsg. und übers. von Kai Brodersen, 1996).

Die Bewertung von Objekten kommt in Cicero’s Schrift *Paradoxa Stoicorum* (VI 51) zur Sprache: „Wenn nämlich diese schlauen Sachverständigen in Vermögensfragen Wiesen und bestimmten Grundstücken einen hohen Wert beimessen, weil diese Art von Vermögen sozusagen den geringsten Schaden erleiden kann, wie hoch ist dann die Tugend zu bewerten, die weder jemals geraubt noch gestohlen werden kann, weder durch Schiffbruch noch durch Feuer verloren geht und weder durch die Gewalt der Stürme noch durch stürmische Zeiten verändert wird?“

Für den Pragmatismus der Römer spricht das Modell von Ulpian zur Abschätzung der Dauer einer Leistung für bestimmte Altersgruppen. Es sollte aber noch rund 1500 Jahre dauern bis der berühmte Astronom Edmund Halley eine Absterbeordnung vorlegte (1693).

G. W. Leibniz schrieb um 1680: „Da es aber niemanden gibt, der uns das Lebensende vorhersagen könnte, muss man zu Vermutungen zurückkehren, die von zweierlei Art sind, die einen nämlich haben eine gewisse sichere und mathematische Schätzung ihrer Wahrscheinlichkeit, die anderen aber sind unbestimmter und unsicher.“

Jakob Bernoulli war wohl der erste, der die Bedeutung der „Kunst des Mutmaßens“ hervorhob. Im vierten Teil Kapitel II seines Werkes unterscheidet Jakob Bernoulli zwischen Wissen und Vermuten. Unter anderem heißt es dort: „Irgend ein Ding vermuthen heisst soviel als seine Wahrscheinlichkeit messen. Deshalb bezeichnen wir als Vermuthungs- oder Muthmaassungskunst (ars conjectandi sive stochastice) die Kunst, so genau als möglich die Wahrscheinlichkeiten der Dinge zu messen und zwar zu dem Zwecke, dass wir bei unseren Urtheilen und Handlungen stets das auswählen und befolgen können, was uns besser, trefflicher, sicherer oder rathsamer erscheint. Darin allein beruht die ganze Weisheit des Philosophen und die ganze Klugheit des Staatsmannes.“ (R. Haussner).

Aus Kapitel IV im vierten Teil sei folgende Stelle zitiert: „Aber ein anderer Weg steht uns hier offen, um das Gesuchte zu finden und das, was wir *a priori* nicht bestimmen können, wenigstens *a posteriori*, d.h. aus dem Erfolge, welcher bei ähnlichen Beispielen in zahlreichen Fällen beobachtet wurde, zu ermitteln.“

So erkannte Jakob Bernoulli, dass man Sterbens- und Überlebenswahrscheinlichkeiten nicht a priori berechnen, sondern nur aus Erfahrung schätzen kann und hierzu braucht man eine Sterbetafel. Sein Neffe Nikolaus Bernoulli (1687 - 1759) wandte sich im Zusammenhang mit Versicherungsprämien gegen die Einwände, man könne mit Menschen nicht wie mit Waren rechnen. Er brachte zum Ausdruck, dass man nur mit der Wahrscheinlichkeit der Dauer des menschlichen Lebens rechne.

2 Geboren am 6. Januar 1655 (27. Dezember 1654 alten Stils).

Erwartungswert

Christiaan Huygens (1629 - 1695) betrachtete das arithmetische Mittel unter dem Gesichtspunkt der mathematischen „Erwartung“ oder „Hoffnung“. Für Jakob Bernoulli (1655 - 1705), auf den das „Gesetz der großen Zahlen“ in seiner ursprünglichen Fassung zurückgeht, war der Mittelwert nur dann bedeutungsvoll, wenn ein Zufallsexperiment sehr oft wiederholt wird. Eine Vorstellung vom Gesetz der großen Zahlen hat schon Peter Süßmilch (1707 - 1767) gehabt (*Die göttliche Ordnung*).

Siméon Denis Poisson (1781 - 1840) hat „Das Gesetz der großen Zahlen“ (loi des grands nombres) begründet.

Leibniz schrieb in einem Brief (April 1705) an Jakob Bernoulli: „…, nämlich dass das arithmetische Mittel zwischen gleich Ungewissem genommen wird, welcher Grundlage sich sowohl die Landleute bedienen, wenn sie den Wert der Grundstücke abschätzen, als auch die Steuerbeamten, wenn sie die mittleren Einkünfte des Vorstehers von Ämtern festsetzen, wenn sich dafür ein Pächter anbietet.“ (Biermann und Faak).

Bei der Bewertung von Leibrenten befasste sich Gottfried Wilhelm Leibniz (1646 - 1716) mit der Schätzung der menschlichen Lebensspanne, wobei er sich an einer arithmetischen Folge orientierte, ohne dies so zu benennen.

Arithmetisches Mittel für Bewertungsprobleme (Braunschweiger Teilung)

Mit Teilungsproblemen waren die Menschen immer konfrontiert (gerechte Aufteilung der Beute oder Ernte, Erbteilungsaufgaben). So hat das arithmetische Mittel nicht nur in der Statistik eine weite Verbreitung gefunden.

Leibniz erwähnte die „Braunschweiger Teilung“ für die Wertfeststellung eines Erbes, Hauses oder eines anderen Gutes. Er schilderte die rechtsgültige Gewohnheit der Bauern von Braunschweig-Lüneburg, drei Gruppen von Schätzern zu bilden, die sie die 3 Schurzen nennen. Aus drei Schätzungen wurde dann ein Mittelwert errechnet.

In der *Abhandlung über die Buchhaltung 1494* von Luca Pacioli wird berichtet: „... so holte man ein Gutachten eines erfahrenen Schätzers ein oder im Zweifelsfalle von mehreren, von denen man dann den Durchschnitt nahm.“

Exkurs: Statistik

Die Herkunft des Begriffs Statistik ist nicht ganz klar. Als Namensgeber der Statistik wird Martin Schmeitzel (1679 - 1747) genannt: „collegium politico-statisticum“. Auch sein Schüler Gottfried Achenwall (1719 - 1772) wird als Namensgeber genannt. Dies geht auf seine Vorlesung über Staatenkunde mit dem Titel „Notitia politica vulgo statistica“ im Jahr 1748 zurück. Diese Staatenkunde hat mit der modernen Statistik nur den Namen gemeinsam. Nach Günter Menges leitete Achenwall den Begriff Statistik von „ragione di Stato“ und „statista“ ab, wie eine handschriftliche Notiz zeigt.

In England entstand die „Politische Arithmetik“, die ausgehend von Geburts- und Sterbezahlen, die zahlenmäßige Entwicklung der Bevölkerung zu beobachten versuchte. Schon John Graunt (1620 - 1674) stellte die relative Häufigkeit der Knabengeburten fest: 139 782 Söhne und 130 866 Töchter, also 1 068 zu 1 000. Damals war aber die Testtheorie noch nicht entwickelt und so konnte nicht beurteilt werden, ob die Beobachtung von Graunt wesentlich oder zufällig war. In Deutschland waren Wegbereiter der Bevölkerungsstatistik Caspar Neumann (1648 - 1715) und Peter Süßmilch (1707 - 1767). Die Aufzeichnungen über Geburten und Todesfälle der Stadt Breslau von Caspar Neumann verwendete Edmond Halley (1656 - 1742) für seine erste „Absterbeordnung“ (Überlebendentafel) im Jahr 1693.

Stochastisch

Der Begriff Stochastik wurde von Jakob Bernoulli eingeführt und erst wieder von L. von Bortkiewicz 1917 aufgegriffen. Dem Lexikon der Mathematik kann entnommen werden: Stochastik, zusammenfassende Bezeichnung für die Disziplinen Wahrscheinlichkeitstheorie und (mathematische) Statistik. Günter Menges definierte dieses Wort kurz und bündig im 1. Band (Theorie) seiner Schrift *Grundriß der Statistik*: „Alles, was auf der Wahrscheinlichkeitsrechnung aufgebaut ist oder sonstwie mit ihr zu tun hat, bezeichnet man als „Stochastik“. Erwin Kreyszig erklärt diesen Begriff so: „Stochastisch bedeutet ganz allgemein mit Zufallsexperimenten und Wahrscheinlichkeiten zusammenhängend“.

Ein Vorgang wird stochastisch genannt, wenn der einzelne Ausgang nicht vorhersagbar ist, jedoch die Struktur vieler individueller Ergebnisse auf lange Sicht absehbar ist. So gelten viele Phänomene als stochastisch, wie zum Beispiel das Lebensalter einer Person mit einer Leibrente.

Eine im voraus berechenbare Wahrscheinlichkeit heißt apriorisch (zum Beispiel ist die Wahrscheinlichkeit mit einem Würfel eine 1 zu werfen gleich 1/6), aposteriorisch oder empirisch eine Wahrscheinlichkeit, die auf Grund von Beobachtungen bestimmt worden ist. Zu beachten ist, dass es sich bei den Glücksspielen um eine Wahrscheinlichkeit a priori handelt, während man zum Beispiel bei Sterbefällen mit Hilfe schon abgelaufener Vorgänge eine Wahrscheinlichkeit a posteriori ermittelt.

Börsenkurse mögen wie ein Würfelwurf als zufällig betrachtet werden, es besteht aber ein entscheidender Unterschied bei diesem Vergleich. Der Würfel bleibt von den vorangegangenen Ergebnissen unbeeinflusst, weil er kein Gedächtnis hat. Dagegen sind die Handlungen der Börsenteilnehmer von den vergangenen und augenblicklichen Ereignissen sehr wohl betroffen, wodurch ihre Wahrnehmung der aktuellen Lage die Zukunftserwartungen maßgeblich beeinflussen werden.

Louis Bachelier - kein Mann seiner Gegenwart

Benoît Mandelbrot (geb. 1924)[3], der den Begriff „Fraktal" prägte, schrieb über Louis Bachelier (1870 - 1946): „Die Tragödie von Bachelier bestand darin, dass er ein Mann der Vergangenheit und der Zukunft, nicht aber seiner Gegenwart war. Ein Mann der Vergangenheit deshalb, weil er über die historischen Wurzeln der Wahrscheinlichkeitstheorie – die Glücksspiele - arbeitete. Zur Einführung stochastischer Prozesse mit stetiger Zeit wählte er den Weg über die stetige Form der Glücksspiele, *La Bourse* [die Börse]. Ein Mann der Zukunft war er sowohl in der Mathematik (der Brief von Lévy legt darüber Zeugnis ab) als auch in der Ökonomie, wo er als der Schöpfer des wahrscheinlichkeitstheoretischen Konzepts des „Martingals" (das ist die geeignete Formulierung für ein *faires Spiel* oder einen *effizienten Markt*) anerkannt ist."

Mandelbrot resümiert: „Den größten Ruhm verdankt Bachelier seinem Konzept, dass sich die Preise wie eine Brown'sche Bewegung verhalten." Außerdem hebt Mandelbrot hervor, dass ein gehöriger Teil der mathematischen Ergebnisse zur Brown'schen Bewegung schon fünf Jahre vor Einstein detailliert beschrieben wurde, nämlich durch Louis Bachelier *(Dictionary of Scientific Biography,* I, 366 - 367). Nach den Ausführungen von Mandelbrot stand im Mittelpunkt dieser Geschichte eine im Jahr 1900 in Paris verteidigte Doktordissertation in den mathematischen Wissenschaften, die die Prüfungskommission nicht sonderlich beeindruckte. Zu dieser Dissertation (*Théorie de la Spéculation*) bemerkte Mandelbrot 2005 (S. 80): „Seine Doktorarbeit legte den Grundstein für die Finanztheorie und – weit allgemeiner – für die Theorie aller Formen zufallsbestimmter Veränderung im Zeitkontinuum".

Die Brown'sche Bewegung dient heute als mathematisches Modell für Zufallsprozesse. Bernhard H. Lavenda brachte in seinem 1985 publizierten Aufsatz *Die Brown'sche Bewegung* (Spektrum der Wissenschaft 4/1985) zum Ausdruck, dass sich in jüngerer Zeit aus dem Studium der Brown'schen Bewegung wichtige mathematische Techniken zur allgemeinen Untersuchung von Zufallsprozessen ergaben. „Diese Techniken setzte man zur Regelung von elektromagnetischem >Rauschen< ein; sie trugen ferner zum Verständnis der Dynamik von Sternhaufen, der Entwicklung von ökologischen Systemen und des Verhaltens von Aktienkursen bei.", schreibt Lavenda.

Exkurs: Brown'sche Bewegung

Der Botaniker Robert Brown (1773 - 1858) machte 1827 eine weitreichende Entdeckung. Er beobachtete unter dem Mikroskop eine unregelmäßige Bewegung bei Pollen, die sich in einer Flüssigkeit befanden. Dieses Phänomen wurde nach ihm benannt.

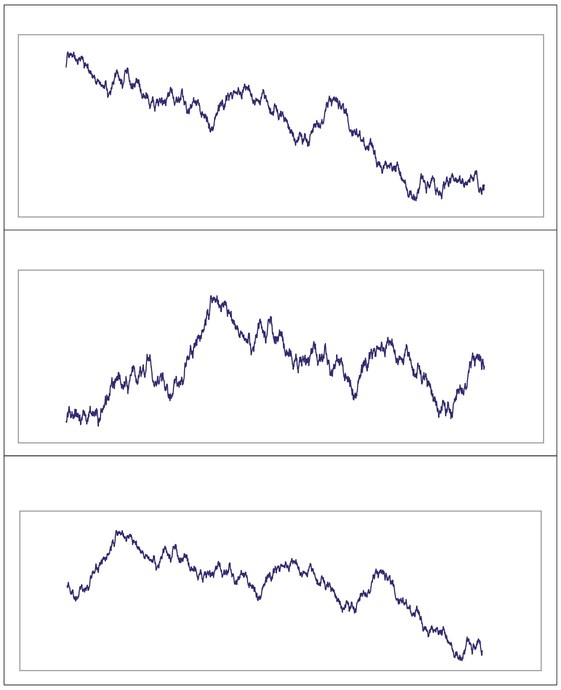
Erzeugung einer einfachen Brown'schen Linie

Um die einfachste Art einer Brown'schen Linie zu erhalten, genügt nach Hans Lauwerier (*Fraktale*, Hückelhoven 1989) die Unterteilung eines Geradenstücks in eine beliebige Anzahl von Punkten und die Erzeugung von Pseudo-Zufallszahlen mit Werten zwischen 0 und 1. Diese werden so umgeformt, dass sie zwischen -0,5 und +0,5 liegen. Mit einem Faktor lässt sich die Stärke der Pseudo-Zufallszahl beeinflussen. Jeder neu gebildete Wert wird zum vorhergehenden addiert. Die so erzeugte Linie kann man sich z.B. als Küstenlinie vorstellen. Lauwerier dachte an eine graphische Darstellung von Gewinn und Verlust von zwei Teilnehmern an einem Glückspiel.

Auf diese Art wurden drei „künstliche Linien" erzeugt (s. Abb. 1). Als „Zufallszahlen-Generator" wurde die Zahl π benutzt. Zu diesem Zweck wurden zunächst rund 9600 Nachkommastellen der Zahl π unter Anwendung des „Tröpfel-Algorithmus" von Stanley Rabinowitz und Dik T. Winter erzeugt. Sodann wurden jeweils vier Nachkommastellen zu einer Zahl zusammengefasst, so dass rund 2400 vierstellige „Zufallszahlen" zur Verfügung standen. Aus diesem Bestand wurden Daten für die Erstellung der in Abbildung 1 dargestellten Kurven ausgewählt.

3 Mandelbrot war von 1958 bis 1993 am Thomas-J.-Watson-Forschungszentrum von IBM tätig. Für die Entwicklung der fraktalen Geometrie der Natur wurde Mandelbrot 1985 von der Columbia University die „Barnard Medal of Meritorious Service to Science" verliehen, eine sehr seltene Auszeichnung, die vor ihm z.B. Einstein, Bohr, Heisenberg, den Curies und Fermi zuteil wurde. Eine von ihm 1967 veröffentlichte Arbeit trug den Titel „Wie lang ist die Küste Britanniens?"

Abb. 1



Brown'sche Linien oder echte Zeitreihen?

Zur Erzeugung von (Pseudo-) Zufallszahlen sei angemerkt: Als einfache Einrichtung für die Erzeugung von Folgen zufälliger Zahlen helfen: Urnen, Würfel und Rouletts. Als Zufallszahlen-Generator kann auch die Zahl π verwendet werden. Die Nachkommastellen von π eignen sich in hervorragender Weise hierfür. Mit einem Rechner können echte Zufallszahlen im Sinne der Wahrscheinlichkeitstheorie nicht erzeugt werden. Jetzt kann auf von unvorhersehbaren physikalischen Phänomenen (Quanteneffekte oder Rauschen) abgeleitete Werte zurückgegriffen werden, vgl. „Innovate! Das Magazin für Forschung und Technologie", Ausgabe September 2005, S. 18ff.

Heisenberg zur Statistik

In *Gespräche über das Verhältnis zwischen Biologie, Physik und Chemie (1930 - 1932)* stößt man auf einen bemerkenswerten Dialog, der hier wiedergegeben wird.

Oskar Klein: „Ist es nicht merkwürdig, dass Einstein so große Schwierigkeiten hat, die Rolle des Zufälligen in der Atomphysik zu akzeptieren? Er kennt doch die statistische Wärmelehre besser als die meisten anderen Physiker, und er hat selbst eine überzeugende statistische Ableitung des Plankschen Gesetzes der Wärmestrahlung gegeben. Fremd können ihm solche Gedanken also sicher nicht sein. Warum fühlt er sich dann gezwungen, die Quantenmechanik abzulehnen, nur weil das Zufällige in ihr eine grundsätzliche Bedeutung gewinnt?"

Darauf antwortete Werner Heisenberg: „Es ist natürlich gerade dieses Grundsätzliche, was ihn stört. Dass man etwa bei einem Topf voll Wasser nicht weiß, wie alle einzelnen Wassermoleküle sich bewegen, ist selbstverständlich. Daher kann sich niemand darüber wundern, dass wir Physiker hier Statistik treiben müssen, so wie etwa eine Lebensversicherungsgesellschaft über die Lebenserwartung ihrer vielen Versicherten statistische Rechnungen anstellen muss. (…)"; vgl. Heisenberg, Werner: Der Teil und das Ganze: Gespräche im Umkreis der Atomphysik. 5. Auflage. München 2003, S. 126.

Das arithmetische Dreieck (bekannt als Pascal'sches Dreieck)

Erst gegen Ende des 17. Jahrhunderts wurde das arithmetische Dreieck (bekannt als Pascal'sches Dreieck) zum Ausgangspunkt für drei Zweige der Mathematik[4] (Studium der unendlichen Reihen, der Kalkül mit endlichen Differenzen und die Wahrscheinlichkeitsrechnung). Das arithmetische Dreieck ist eine Hilfstafel, der man bekanntlich die Koeffizienten der Entwicklung von $(a + b)^n$ entnehmen kann. Man spricht auch vom Dreieck der Binomialkoeffizienten.

Gewöhnlich werden die Binomialkoeffizienten in Form eines gleichschenkligen Dreiecks angeordnet. Es handelt sich dabei um die Koeffizienten des Binoms $(a + b)^n$. Mit dem arithmetischen Dreieck, das mit vielen Gebieten der Mathematik vernetzt ist, lassen sich die Eigenschaften des binomischen Lehrsatzes veranschaulichen.

Jedermann ist der Ausdruck $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ bekannt. Mit der Schreibweise des Binoms $(a + b)^n$ lässt sich Zeit gewinnen und man behält den Überblick.

Zur Konstruktion des arithmetischen Dreiecks

Das Bildungsgesetz dieser Koeffizienten wird im Folgenden leicht erkennbar:

1 1	1 2 1	1 3 3 1	1 4 6 4 1
1 1	1 2 1	1 3 3 1	1 4 6 4 1
1 2 1	1 3 3 1	1 4 6 4 1	1 5 10 10 5 1

Die so gebildeten Zahlen entsprechen den Zeilen 3 bis 6 im arithmetischen Dreieck.

4 Nebenbei sei angemerkt, dass der Satz von Frank Morley erst in das Jahr 1899 fällt: Das Dreieck, das durch Winkeldreiteilung entsteht, ist das Morley-Dreieck, das stets gleichseitig ist.

Erklärung des Arithmetischen Dreiecks

Abbildung 2 zeigt das arithmetische Dreieck bis n = 10. Man erhält jede gesuchte Zahl, wenn man die links und rechts über ihr stehenden addiert; zum Beispiel 10 = 4 + 6.

Jede Zahl ist gleich der Summe aller Zahlen der linken oder rechten Schrägzeile, beginnend mit der links oder rechts über ihr stehenden Zahl; zum Beispiel
10 = 4 + 3 + 2 + 1 oder 10 = 6 + 3 + 1.

Jede Schrägzeile ist eine *arithmetische Folge* höherer Ordnung; zum Beispiel:
1. Schrägzeile: 1, 1, 1, 1, 1, . arithmetische Folge 0. Ordnung
2. Schrägzeile: 1, 2, 3, 4, 5, … arithmetische Folge 1. Ordnung
3. Schrägzeile: 1, 3, 6, 10, 15, … arithmetische Folge 2. Ordnung
usw.
Die dem arithmetischen Dreieck unschwer zu entnehmenden Binomialkoeffizienten helfen, Kombinationen zu berechnen. Wahrscheinlichkeitsuntersuchungen beruhen auf der Analyse von Permutationen und Kombinationen der vorkommenden Elemente. Damit erhält man die Anzahl der Möglichkeiten, aus n Elementen k Elemente herauszugreifen.

Ein Lesebeispiel für $\binom{n}{k}$: Für n = 6 und k = 3 erhält man als Ergebnis 20.
Ein Beispiel für: $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

Diesem Dreieck lassen sich die Zufallswahrscheinlichkeiten von Ereignissen leicht entnehmen. So erhält man z.B. die Wahrscheinlichkeit für die beim Fall von 2 Münzen auftretenden Möglichkeiten (zweimal Wappen, Wappen und Zahl, zweimal Zahl: 1/4, 2/4, 1/4).

Berechnung des Binomialkoeffizienten

Der Binomialkoeffizient kann auch mit folgender Formel berechnet werden: $\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!\,k!}$.

Mit n! wird abkürzend das Produkt der positiven ganzen Zahlen von 1 bis n bezeichnet und Fakultät genannt, also $n! = 1 * 2 * 3 * \ldots * n$; für 0! gilt 1. Von James Stirling (1692 - 1770) stammt die Näherungsformel $n! \approx (n/e)^n \sqrt{2\pi n}$.

Der Ausdruck $\binom{n}{k}$ kann auch mit Hilfe der Logarithmen annähernd berechnet werden. Hilfreich ist dabei eine Tabelle, die die Fakultäten und ihre Zehnerlogarithmen ausweist.

Zum Beispiel: $\lg \binom{35}{17} = \lg 35! - \lg 17! - \lg 18! =$
$40{,}01423 - 14{,}55107 - 15{,}80634 = 9{,}65682$,

also 4 537 535 126 oder 4 537 567 619 (Taschenrechner HP 41C) gegenüber dem exakten Wert 4 537 567 650.

Binomialverteilung

Es sei die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses p und die Wahrscheinlichkeit, dass das Ereignis nicht eintritt, q = 1 – p ($0 \leq p \leq 1$). Dann ist die Wahrscheinlichkeit, dass das Ereignis in n unabhängigen Versuchen xmal eintrifft, durch das Verteilungsgesetz der Binomialverteilung gegeben:

$$P_n(x) = \binom{n}{x} p^x q^{n-x}; \quad x = 0, 1, \ldots, n.$$

Für kleine Werte von n und x ist die Binomialverteilung praktikabel. Für große Werte wird je nach der Aufgabenstellung entweder die Poissonverteilung oder die Normalverteilung angewendet. Von Abraham de Moivre (1667 - 1754) wurde der Zusammenhang zwischen Binomialverteilung und Normalverteilung erkannt und 1718 in seinem Werk *The Doctrine of Chances* publiziert.

Beispielsweise lässt sich aus der Wahrscheinlichkeit für eine Knabengeburt p = 0,515 mittels der Binomialverteilung berechnen, mit welcher Wahrscheinlichkeit in einer Familie mit z.B. vier Kindern ein Knabe und drei Mädchen, zwei Knaben und zwei Mädchen, drei Knaben und ein Mädchen oder lauter Knaben zu erwarten sind.

Man kann aber auch die Wahrscheinlichkeit dafür berechnen, dass aus einer Gruppe von zum Beispiel zehn Gleichaltrigen innerhalb des nächsten Jahres niemand, genau eine Person, mehr als eine Person oder mindestens eine Person stirbt.

Galton'sches Brett

Die Binomialverteilung kann auch am Modell eines „Römischen Brunnen“ dargestellt werden. Ein mechanisches Modell zur Demonstration und Veranschaulichung der Binomialverteilung ist ein Galtonbrett (nach Francis Galton, 1822 - 1911), das auch als Zufallsapparat bezeichnet wird, siehe Abbildung 3.

Die Wahrscheinlichkeit, dass eine Kugel im Fach x unten ankommt, ist $f(x) = \binom{n}{x} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

Dabei werden bei n Nagelreihen n+1 Fächer benötigt. Bei fünf Nagelreihen würde man in sechs Fächern von links nach rechts $\frac{1}{32}, 5 \cdot \frac{1}{32}, 10 \cdot \frac{1}{32}, 10 \cdot \frac{1}{32}, 5 \cdot \frac{1}{32}, \frac{1}{32}$

Abb. 2 Das arithmetische Dreieck (Pascalsches Dreieck)

n	k = 0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	2^n
= 0	1											1
1	1	1										2
2	1	2	1									4
3	1	3	3	1								8
4	1	4	6	4	1							16
5	1	5	10	10	5	1						32
6	1	6	15	**20**	15	6	1					64
7	1	7	21	35	35	21	7	1				128
8	1	8	28	56	70	56	28	8	1			256
9	1	9	36	84	126	126	84	36	9	1		512
10	1	10	45	120	210	252	210	120	45	10	1	1024
⋮											⋱	

aller Kugeln finden. In diesem Zusammenhang wird auf die fünfte Zeile im arithmetischen Dreieck hingewiesen (1, 5, 10, 10, 5, 1); die Summe der in dieser Zeile ausgewiesenen Binomialkoeffizienten beläuft sich auf 32 ($=2^5$).

Poisson-Verteilung

Diese Verteilung wird dann angewendet, wenn ein Ereignis sehr selten eintritt. Man erhält die Poisson-Verteilung durch einen Grenzübergang aus der Binomialverteilung. Ein klassisches Beispiel für eine Poisson-Verteilung (von S.D. Poisson 1837 eingeführt) ist der Tod von Soldaten durch Pferdehufschlag.

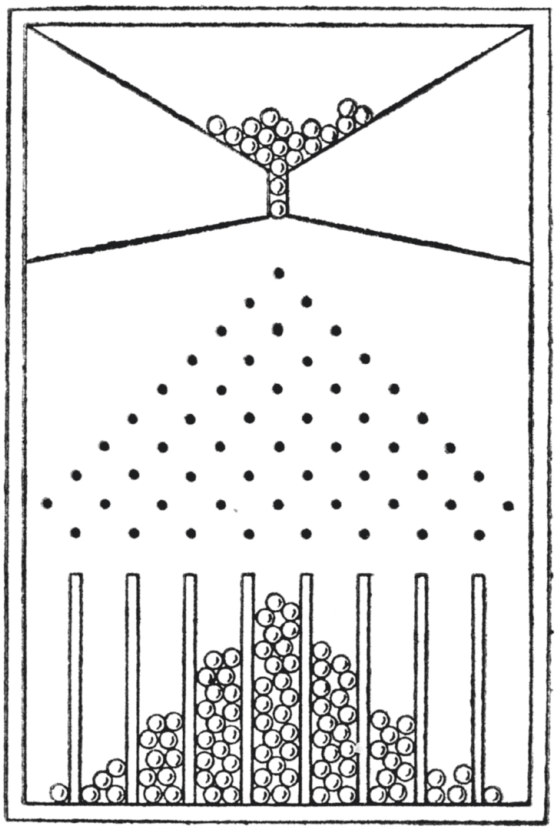
Wachstumsfunktion und Binomischer Lehrsatz

Die Binomialkoeffizienten lassen sich auch bei der Darstellung einer Wachstumsfunktion heranziehen – solange die Anzahl der Jahre nicht groß ausfällt. Man kann fragen, wie sich eine Größe (z.B. Kapital, Bevölkerungsstand, Holzbestand) nach n Jahren entwickelt, wenn ihr eine konstante jährliche Zuwachs- oder Schrum-pfungsrate zugrunde liegt. Es gilt: $(a + b)^n$, wobei $a = 1$ und $b = p/100$. Zur Veranschaulichung ein Beispiel (zwei Prozent für vier Jahre): $b = 2/100$. Für die Anzahl der Jahre werden die Binomialkoeffizienten (fünfte Zeile des arithmetischen Dreiecks) herangezogen (1, 4, 6, 4, 1). Somit lautet die Rechnung:

$a^4 + 4\,a^3\,b + 6\,a^2\,b^2 + 4\,a\,b^3 + b^4 = 1{,}082$ oder 8,2 %.

Die Überlegenheit der logarithmischen Berechnung braucht nicht besonders herausgestellt zu werden.

Abb. 3



Zufallsapparat oder Galton'sches Brett. Aus: Flaskämper, Paul: Allgemeine Statistik. Hamburg 1962.

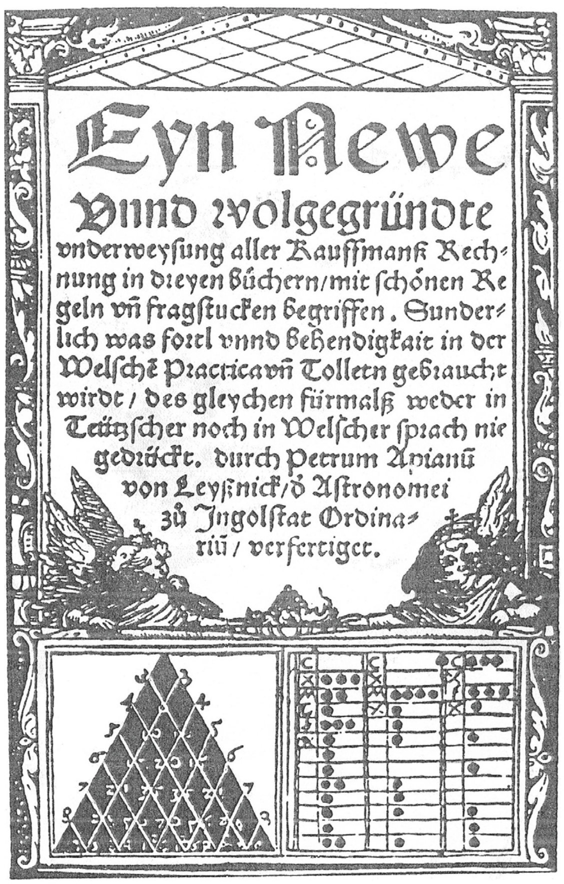
Die Zahl e und der binomische Lehrsatz

Aus der „Geschichte der Mathematik" von Becker und Hofmann (Bonn 1951) sei folgende Textstelle von Seite 231 wiedergegeben: „…, wobei er [Euler] mit D. Bernoulli (1728) e als Grenzwert von $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ und in Wiedergabe eigener Studien e^x als Grenzwert von $\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$ im Zusammenhang mit dem binomischen Lehrsatz erklärt.“

Historisches zum arithmetischen Dreieck

Nach diesen Ausführungen zum arithmetischen Dreieck soll dessen Geschichte noch skizziert werden. Die erste bekannte Darstellung des arithmetischen Dreiecks im christlichen Abendland ziert die Titelseite der „Kauffmanß Rechnung“ von Peter Apian, die 1527 in Ingolstadt gedruckt wurde (siehe Abbildung 4). Zuvor tauchte diese Darstellung in einem chinesischem Traktrat von Chu Shih-Chieh aus dem Jahr 1303 auf. Georges Ifrah zeigt in seiner *Universalgeschichte der Zahlen* ein arithmetisches Dreieck mit ostarabischen Ziffern. Eine Anmerkung weist darauf hin, dass die gezeigte Tafel von dem Mathematiker Al-Karaji übernommen wurde, der Ende des 10. oder Anfang des 11. Jahrhunderts geboren wurde. Nach Dörrie wurde der binomische Satz wahrscheinlich von dem arabischen Astronomen Omar Alchaijâmî entdeckt, der im ersten Viertel des 11. Jahrhunderts zu Bagdad lebte (Dörrie, Heinrich: Triumph der Mathematik. Würzburg 1958, S. 36).

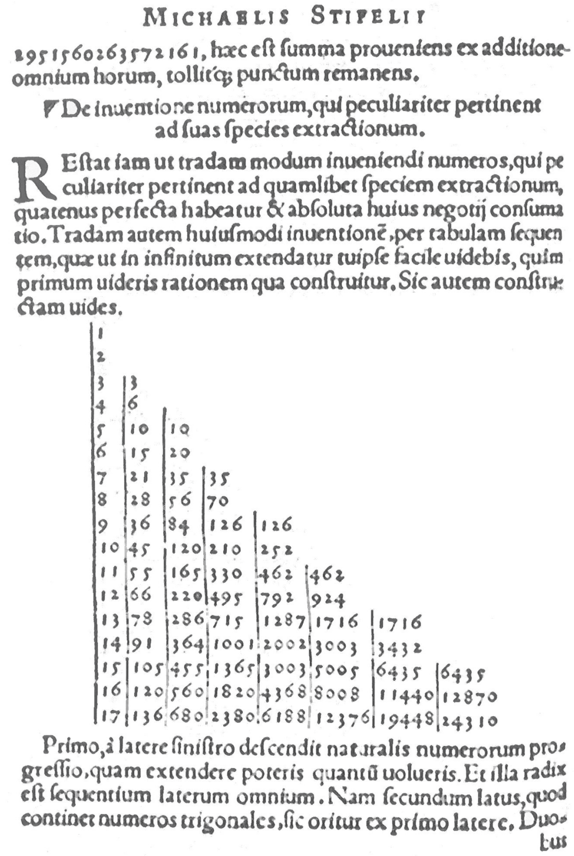
Abb. 4


Eyn Newe
Unnd wolgegründte
underweysung aller Kauffmanß Rechnung in dreyen Büchern/mit schönen Regeln vn̄ fragstucken begriffen. Sunderlich was fortl vnnd behendigkait in der Welschē Practica vn̄ Tolletn gebraucht wirdt/des gleychen fürmalß weder in Teütscher noch in Welscher sprach nie gedrückt. durch Petrum Apianū von Leyßnick/d' Astronomei zů Ingolstat Ordinariū/verfertiget.

Aus: Apian, Peter: Eyn Newe unnd wolgegründte underweysung aller Kauffmanß Rechnung … .
Nachdruck von 1995 der Ausgabe Ingolstadt 1527.

Vor Pascal und Jakob Bernoulli hat Michael Stifel (1487 - 1567) die Binomialkoeffizienten in seiner 1544 veröffentlichten *Arithmetica integra* dargestellt (siehe Abbildung 5).

Abb. 5


MICHAELIS STIFELII

2951560263572161, hæc eſt ſumma prouenens ex additione omnium horum, tollitq́; punctum remanens.

De inuentione numerorum, qui peculiariter pertinent ad ſuas ſpecies extractionum.

Reſtat iam ut tradam modum inueniendi numeros, qui peculiariter pertinent ad quamlibet ſpeciem extractionum, quatenus perfecta habeatur & abſoluta huius negotij conſumatio. Tradam autem huiuſmodi inuentionē, per tabulam ſequentem, quæ ut in infinitum extendatur tuipſe facile uidebis, quum primum uideris rationem qua conſtruitur. Sic autem conſtructam uides.

1							
2							
3	3						
4	6						
5	10	10					
6	15	20					
7	21	35	35				
8	28	56	70				
9	36	84	126	126			
10	45	120	210	252			
11	55	165	330	462	462		
12	66	220	495	792	924		
13	78	286	715	1287	1716	1716	
14	91	364	1001	2002	3003	3432	
15	105	455	1365	3003	5005	6435	6435
16	120	560	1820	4368	8008	11440	12870
17	136	680	2380	6188	12376	19448	24310

Primo, à latere ſiniſtro deſcendit naturalis numerorum progreſſio, quam extendere poteris quantū uolueris. Et illa radix eſt ſequentium laterum omnium. Nam ſecundum latus, quod continet numeros trigonales, ſic oritur ex primo latere. Duobus

Aus: Stifel, Michael: Arithmetica integra. Nürnberg 1544.

Pascal hat über diese Zahlen ein Traktat verfasst, das posthum in der Mitte des 17. Jahrhunderts (1665) veröffentlicht wurde (*Traité du Triangle Arithmétique*, …). Dieses Werk kannte Jakob Bernoulli nicht. Zu Beginn seiner „Permutations- und Combinationslehre“ bemerkte Bernoulli: „Daher haben auch einige bedeutende Männer: Schooten, Leibniz, Wallis, Prestet sich mit diesem Gegenstande beschäftigt, was wir erwähnen, um der irrthümlichen Annahme vorzubeugen, dass alles neu sei, was wir vorzutragen beabsichtigen. Jedoch haben wir auch verschiedene eigene Resultate von nicht zu unterschätzender Bedeutung hinzugefügt, so besonders den allgemeinen und leichtverständlichen Beweis für die Eigenschaften der figurirten Zahlen; auf diesen, welcher unseres Wissen noch von

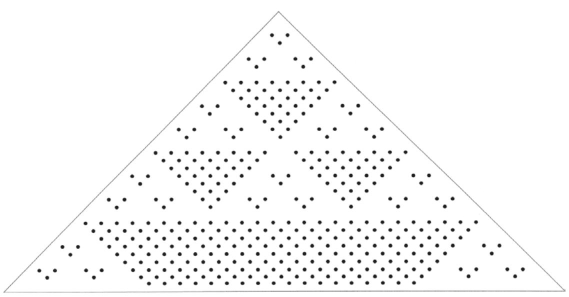
Niemand vor uns gegeben oder gefunden ist, stützen sich viele weitere Resultate.“ (R. Haussner).

In einer Bemerkung von Jakob Bernoulli heißt es: „Viele haben sich schon, wie ich an dieser Stelle bemerken möchte, mit Betrachtungen über figurirte Zahlen beschäftigt (unter ihnen Faulhaber und Remmelin aus Ulm, Wallis, Mercator in seiner „Logarithmotechnia“, Prestet und andere), aber ich weiß keinen, welcher einen allgemeinen und wissenschaftlichen Nachweis dieser Eigenschaft gegeben hat. (…).“ (R. Haussner).

Muster im arithmetischen Dreieck

Bei Untersuchungen über die Teilbarkeit der Binomialkoeffizienten entdeckte man, das im Pascalschen Dreieck (arithmetischen Dreieck) interessante Muster entstehen, vgl. Peitgen, Jürgens und Saupe: Chaos: Bausteine der Ordnung. Reinbek bei Hamburg 1998, Kapitel 7. In Abbildung 6 wurden die Binomialkoeffizienten, die ohne Rest (modulo) durch drei teilbar sind als „•“ dargestellt. Dieser Abbildung liegen die ersten 35 Zeilen des arithmetischen Dreiecks zugrunde. Die Binomialkoeffizienten wachsen stark an, wenn der Zeilenindex n erhöht wird. Zum Beispiel ergibt der Ausdruck $\binom{35}{17}$ die Zahl 4 537 567 650 (s. S. 41).

Abb. 6



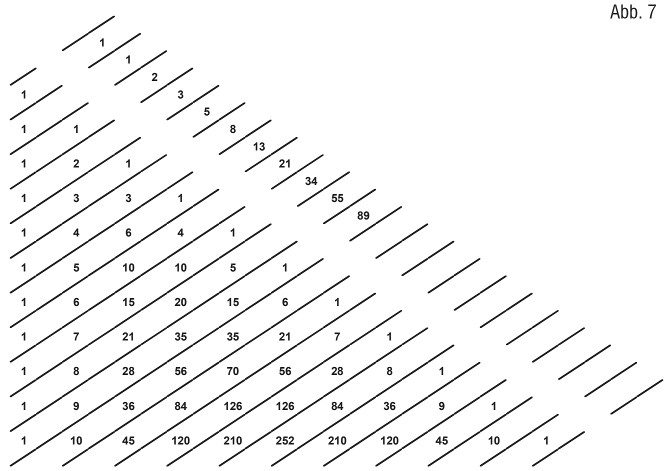
Die Binomialkoeffizienten im Pascal'schen Dreieck, die durch 3 ohne Rest teilbar sind, wurden durch einen Punkt „•“ gekennzeichnet; Berechnungen des Verfassers.

Zum Mythos Fibonaccizahlen: Das arithmetische Dreieck

Zweifelsfrei hat sich die Dreiecksform für die Darstellung der Binomialkoeffizienten bewährt. Es ist aber nicht zwingend diese Gestalt zu wählen. Jakob Bernoulli hatte für diese Zahlen eine eigene Anordnung gewählt. Er überschrieb seine Zahlenanordnung mit „Tabula Combinationum, seu Numerorum Figuratorum“ (R. Haussner übersetzte dies mit „Tafel der figurirten Zahlen“). Figurierte Zahlen sind Dreiecks-, Pyramidenzahlen usw.

Die von Jakob Bernoulli gewählte Anordnung der Binomialkoeffizienten könnte aufklären helfen, wie Leonardo von Pisa (etwa 1180 bis nach 1240), genannt Fibonacci, die nach ihm

Abb. 7



„Tafel der figurirten Zahlen“ von Jakob Bernoulli und die „Fibonacci-Zahlen“

benannten Zahlen entdeckt haben könnte. Abbildung 7 verdeutlicht dies: Der untere Teil entspricht dem Tabellenaufbau von Jakob Bernoullli und der obere Teil zeigt die „Fibonacci-Zahlen“ (1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, …). In dieser Abbildung wurden schräg verlaufende Linien eingezeichnet, damit deutlich wird, wie die im oberen Teil ausgewiesenen Zahlen entstanden sind. Es handelt sich also jeweils um die Summe der in jeder Schrägzeile vorkommenden Zahlen. Das sind die sogenannten Fibonacci-Zahlen, die der von Leonardo von Pisa gestellten Kaninchenaufgabe zugrunde liegen. Sein Werk „liber abbaci“ erschien 1202.

Es sei dahingestellt, ob Fibonacci ein guter Beobachter oder Erfinder war. Seine Reisen in die arabische Welt boten ihm wohl Gelegenheit zu seiner Wissenserweiterung. Eduard Lucas soll 1877 diese Folge von Zahlen nach Fibonacci benannt haben. Die so genannten Fibonacci-Zahlen lassen sich auch mit folgender Formel explizit gewinnen:

$$F_n = \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]\frac{1}{\sqrt{5}}$$

Nicht sehr verbreitet scheint das Wissen zu sein, dass diese Folge auf das arithmetische Dreieck zurückgeführt werden kann.

Verblüffende Eigenschaften der Fibonacci-Zahlen

Die Folge beginnt mit 1, 1 und ab dem dritten Glied gilt: Jedes Glied ist gleich der Summe der beiden Vorgänger, also in der Form: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, … Oben wurde gezeigt, dass die Wurzeln dieser bedeutenden Reihe im arithmetischen Dreieck liegen.

Bemerkenswert an dieser Reihe ist, dass die ersten Differenzen eine Reihe ergeben, die der ursprünglichen gleicht. Die Fibonacci-Zahlen gelten in der Geschichte der Mathematik als die erste rekurrente Reihe.

Diese Folge von Zahlen stellt eine Verbindung von der Mathematik zur Kunst her, weil das Verhältnis aufeinander folgender Fibonacci-Zahlen gegen den „Goldenen Schnitt“ $\Phi = 0{,}5\,(\sqrt{5} + 1) \approx 1{,}618$ konvergiert. Dieser spielt seit der Antike bei Bauwerken, Gemälden und Skulpturen eine herausragende Rolle. So entstand Kunst aus Wissen. Die Fibonacci-Folge drückt viele Beziehungen in der Mathematik und Natur aus. So entspricht zum Beispiel die Proliferation zahlreicher Pflanzen einer Folge von Fibonacci-Zahlen. Proliferation bedeutet nach Brockhaus: [lat. Kunstwort „Nachkommenerzeugung“], Sprossung, Wucherung. In der Botanik weiß man, dass in natürlichen Spiralen immer wieder spezielle Zahlen vorkommen, so bilden zum Beispiel die Samen der Sonnenblume 55 Spiralen in der einen und 89 in der anderen Richtung.

Kurz gestreift wird das griechische Theater in Epidauros. Das Auditorium wird mittlerweile auf etwa 300 v. Chr. datiert. Es stellt sich die Frage, ob es nur ein Zufall ist, dass die Anzahl der Sitzreihen über und unter dem *diazoma* (dem Umgang quer durch die Sitzreihen) 34 bzw. 21 beträgt, vgl. Dilke, O.A.W.: Mathematik, Maße und Gewichte in der Antike. Stuttgart 1991.

Die Börsenanalyse mit Fibonacci-Zahlen sucht wahrscheinlich vergebens nach dem roten Faden im Börsengeschehen. Besser orientiert man sich an Karl von Holtei (1798 - 1880), der den Satz prägte: „Die Theorie träumt, die Praxis belehrt.“ Goethe lässt Mephistopheles beim Auftritt eines Schülers sagen: „Grau, teurer Freund, ist alle Theorie, Und grün des Lebens goldner Baum.“, vgl. Faust Erster Teil 2038.

Bernoullis’s Potenzsummenproblem (Summæ Potestatum)
Mit einem beachtenswerten Kommentar versah Jakob Bernoulli seine Tafel „Die Summe der Potenzen der natürlichen Zahlen.“: „Mit Hilfe der obigen Tafel habe ich innerhalb einer halben Viertelstunde gefunden, dass die 10ten Potenzen der ersten tausend Zahlen die Summe liefern:
91 409 924 241 424 243 424 241 924 242 500.“ Die entsprechende Formel lautet:

$$S\left(n^{10}\right) = \frac{1}{11}n^{11} + 0{,}5\,n^{10} + \frac{5}{6}n^{9} - n^{7} + n^{5} - 0{,}5\,n^{3} + \frac{5}{66}n.$$

Die Lösung des Potenzsummenproblems durch Jakob Bernoulli beruht auf dem binomischen Satz. Eine Regel für die Summe der Quadrate der natürlichen Zahlen ist übrigens bereits in Keilschrifttexten enthalten.

Erinnert sei hier an den neunjährigen Carl Friedrich Gauß (1777 - 1855), der seinen Lehrer Büttner beeindruckte, weil er sehr rasch die Summe einer arithmetischen Folge berechnet hatte. Ähnlich wie Gauß ging Gottfried Wilhelm Leibniz (1646 - 1716) vor, als er die mittlere Dauer des menschlichen Lebens bestimmen wollte und dazu die Summe der Zahlen $1 + 2 + 3 + \ldots + 80$ benötigte.

Problem der vertauschten Briefe
Die Zahl e ist ein wesentlicher Bestandteil der Gleichungen zur Berechnung von Zins und Zinseszins. Dieser bemerkenswerten Zahl begegnet man häufig in Wahrscheinlichkeitsaufgaben. Die Nützlichkeit dieser Zahl sei hier am klassischen Problem der vertauschten Briefe demonstriert. Dabei spielt auch der binomische Satz eine beachtliche Rolle.

Diese Aufgabe wurde zuerst von Nikolaus Bernoulli I. (1687 - 1759), ein Neffe der beiden großen Mathematiker Jakob und Johann Bernoulli, behandelt. Später löste Leonhard Euler (1707 - 1783) das Problem unabhängig von Bernoulli. In etwas anschaulicherer Form lautet die Aufgabe: Jemand schreibt n Briefe und auf n Umschläge die zugehörigen Anschriften. Auf wie viele Arten kann er alle Briefe in falsche Umschläge stecken?

Die Lösung dieses Problems soll folgende Übersicht zeigen.

Die Aufgabe über die vertauschten Briefe

Tab. 1

Anzahl der			Wahrscheinlichkeit, dass kein Brief richtig einkuvertiert ist (Zahl)
Briefe (n)	Vertauschungen (n!)	Vertauschungen, in denen kein Umschlag den zugehörigen Brief enthält	
	1	2	3
2	2	1	0,500000
3	6	2	0,333333
4	24	9	0,375000
5	120	44	0,366667
6	720	265	0,368055
7	5 040	1 854	0,367857
8	40 320	14 833	0,367882
9	362 880	133 496	0,367879
10	3 628 800	1 334 961	0,367879

Spalte 3 dieser Darstellung beinhaltet die Wahrscheinlichkeit, dass kein Brief richtig einkuvertiert wurde. Man stellt fest, dass durch ein Anwachsen von n die Zahlen in Spalte 3 kaum mehr beeinflusst werden. Die Wahrscheinlichkeit, dass jeder Brief sich in einem falschen Briefumschlag befindet, beläuft sich auf 0,367879. Dieser Grenzwert ist der Reziprokwert der Zahl e, also 1/e oder e^{-1}. Diesen Wert erhält man übrigens auch mit Hilfe des Binomialsatzes, wenn man a = 1 und b = $-\frac{1}{n}$ setzt und n möglichst groß wählt: $1-1+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+-\cdots$

Ein praktisches Beispiel soll veranschaulichen, wie die Daten in den Spalten 1 und 2 der genannten Übersicht zustande kommen.

Bei den in Spalte 1 ausgewiesenen Daten handelt sich um die Anzahl der Permutationen (Vertauschungen) von n Elementen. Eine Permutation ist eine Zusammenstellung von n Elementen, bei der jedes der n Elemente genau einmal vorkommt. Permutationen ohne Wiederholung liegen vor, wenn alle n Elemente verschieden sind. Nachfolgend ein Beispiel für vier Elemente: a, b, c, d; 4! = 24.

a b c d	b a c d	c a b d	d a b c
a b d c	b a d c	c a d b	d a c b
a c b d	b c a d	c b a d	d b a c
a c d b	b c d a	c b d a	d b c a
a d c b	b d a c	c d a b	d c a b
a d b c	b d c a	c d b a	d c b a

Spalte 2 der Übersicht enthält die Anzahl der aus n Elementen gebildeten Permutationen, in denen kein Element auf seinem ursprünglichen Platz steht. Hierzu ein Beispiel für vier Elemente

a, b, c, d mit den Permutationen

b a d c	c a d b	d a b c
b c d a	c d a b	d c a b
b d a c	c d b a	d c b a

Die entsprechende Anzahl der Permutationen errechnet sich für n = 4 folgendermaßen: $4!\left(1-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}\right) = 9$.

Oder unter Zuhilfenahme der Binomialkoeffizienten wie folgt: $4! - 4 \cdot 3! + 6 \cdot 2! - 4 \cdot 1! + 1 = 9$.

Verbleibt die Frage nach der Wahrscheinlichkeit, dass wenigstens ein Brief in den passenden Umschlag kommt. Die Lösung lautet kurz und bündig: $1 - \frac{1}{e}$ oder 0,6321…, also fast 2/3.

Formelmäßig: $1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} - + \ldots$

Wahrscheinlichkeit und Mehrdeutigkeit

Charles Sanders Peirce bemerkte einmal, dass es in keiner anderen mathematischen Theorie so leicht für Experten ist, sich zu irren, als in der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Selbst erstklassige „Köpfe“ waren vor Irrtümern nicht gefeit. Vorsicht also bei der Beantwortung von Fragen der Art „Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass …?“

Eine bekannte Wahrscheinlichkeitsrechnung, ist die folgende: Wenn zwei Münzen gleichzeitig geworfen werden, dann hat der Zufall drei Möglichkeiten: a) Wappen und Wappen, b) Wappen und Zahl und c) Zahl und Zahl. Stehen die Chancen 1/3 : 1/3 : 1/3? Nein, sondern: 25 : 50 : 25 (s. S. 41).

Ausgewählte Paradoxien der Wahrscheinlichkeit

- Das bekannteste aller Wahrscheinlichkeitsparadoxien ist das „Petersburger Problem“, das Daniel Bernoulli 1730/31 behandelte.
- Gefühlsmäßig hält man die Wahrscheinlichkeit für gering, dass zwei von 24 wahllos ausgesuchten Personen am gleichen Tag Geburtstag haben. Tatsächlich liegt die Wahrscheinlichkeit bei 54 %.
- Simon Newcomb (1835 - 1909) fiel auf, dass die vorderen Seiten einer Logarithmentafel stärker abgegriffen waren als die hinteren. Frank Benford untersuchte, ob Zahlen häufiger mit der Ziffer 1 beginnen. Er veröffentlichte 1938 sein Gesetz der Zahlen-Anomalie (*The Law of Anomalous Numbers*). Es lautet: $f(i) = \log\left(\frac{i+1}{i}\right)$. Der Wert f steht für die Wahrscheinlichkeit, dass eine Zahl mit einer bestimmten Ziffer beginnt. Der Kleinbuchstabe i steht für die Ziffern 1 bis 9. Danach beläuft sich die Wahrscheinlichkeit, dass die erste Ziffer einer Zahl eine Eins ist auf 30,1 % und nicht auf 1/9 wie man das normalerweise erwarten würde. Entsprechend gilt für die Ziffer 9 die Wahrscheinlichkeit 4,6 %.

post hoc, ergo propter hoc

Nach Brockhaus: [lat. „danach, also deshalb“], Formel für den Fehlschluß, der von der zeitlichen Aufeinanderfolge ohne weiteres auf Verursachung schließt.

Ein beliebtes Beispiel dafür: Täglich beobachtet man den Wechsel von Tag und Nacht. Glaubt jemand, dass die Nacht die Ursache des Tages sei und der Tag die Ursache für die Nacht, so würde er „post hoc, ergo propter hoc“ schließen. Tatsächlich wird der Wechsel von Tag und Nacht durch die Rotation der Erde um ihre eigene Achse verursacht.

Zwischen 9 und 11 – eine unterhaltsame Frage

Nachfolgend sei eine von C. Stanley Ogilvy in seinem Buch

Mathematische Leckerbissen (Übers. von Dr. Eberhard Bubser, Braunschweig 1969) gestellte Frage wiedergegeben, mit der er darauf aufmerksam machen wollte, welche Präzision des Denkens und des Ausdrucks erforderlich ist, wo es sich um Durchschnittswerte, Wahrscheinlichkeiten und Erwartungswerte handelt.
„Welchen Wert darf man am ehesten für x erwarten, wenn man nichts weiter weiß, als dass x zwischen 9 und 11 liegt? Oder, falls diese Formulierung einfach als zu vage empfunden wird: angenommen, man wird gezwungen, den Wert von x zu erraten und muß für jedes Prozent Irrtum eine Geldstrafe zahlen. Bei welcher Schätzung fällt die größte mögliche Strafe am kleinsten aus? Auf den ersten Blick würde man vielleicht auf 10 setzen, weil dabei der Fehler nach beiden Seiten nicht größer als 1 werden kann. Aber 9,9 wäre eine bessere Schätzung, weil der Fehler dann 10 % des wahren Wertes nicht überschreiten kann; während bei der Schätzung 10 der Fehler größer als 11 % wird, wenn der wahre Wert dicht bei 9 liegt.
Man kann das Problem algebraisch lösen, wenn man x so wählt, dass der maximale Fehler nach beiden Seiten gleich wird: $\frac{x - 9}{9} = \frac{11 - x}{11}$.

Beobachten wir nun, was geschieht, wenn wir den zulässigen Bereich erweitern! Angenommen, wir wissen von x nur, dass es zwischen 1 und 100 liegt. Das gleiche Verfahren, das wir eben angewandt haben, führt auf ein x, das dicht bei 2 liegt (genau 1,98). Und das ist die richtige Antwort; der maximale Fehler nach beiden Seiten beträgt jetzt fast 100 %. Dadurch kommen einem Zweifel, ob die angemessenste Interpretation des ‚am ehesten zu erwartenden Wertes' wirklich in jedem Falle das Minimum des größten möglichen Fehlers ist. Nur wenige Menschen dürften 2 für eine plausible Schätzung einer Zahl zwischen 1 und 100 halten. In Wirklichkeit gibt es natürlich keinen ‚am ehesten zu erwartenden Wert'. Solange wir keine weiteren Daten haben, bleibt eine Zahl so gut wie die andere; alle sind gleichwahrscheinlich."

Das Spiel mit dem Zufall
Man glaubt, dass jeder weiß, was Zufall ist, aber dennoch fällt es schwer ihn zu definieren. Zufallsereignisse bestimmen unser tägliches Leben. Man unterscheidet sichere, unmögliche und zufällige Ereignisse. Ein sicheres Ereignis liegt vor, wenn unter bestimmten Bedingungen ein Ereignis immer eintritt. Kann ein Ereignis nie auftreten, so ist es ein unmögliches Ereignis. Besteht schließlich die Möglichkeit des Auftretens oder des Nichtauftretens, so wird es als zufälliges Ereignis bezeichnet.

Die vom Siemens-Museum herausgegebene Schrift *Schönheit der Mathematik* [Eine Sonderausstellung des Siemens-Museums] beinhaltet u.a. einen Beitrag (mit Bild) unter dem Titel *Das Spiel mit dem Zufall (Wahrscheinlichkeitsrechnung)*, dem das Folgende entnommen wurde:
„Ein Großteil der Wahrscheinlichkeitsrechnung beschäftigt sich mit Fragen, die sich aus dem Zusammenwirken von Gesetz und Zufall ergeben. Ein Beispiel hierfür sind etwa Verteilungen mit Schwerpunkten. Eindrucksvoll sind auch Versuche, aus der Gleichverteilung kleinere Bereiche herauszuvergrößern und die Gesetzmäßigkeiten der sich hieraus ergebenden Strukturen zu untersuchen."

Wesentlich oder zufällig?
Oft wird bei statistischen Tests die Frage gestellt, ob die aufgetretenen Abweichungen zufälliger oder wesentlicher Natur sind. Häufig lässt sich eine Antwort mit den angebotenen Prüfverfahren finden.

Zwei wichtige Testverfahren sind der sog. Chi-Quadrat-Test (χ^2 - Test) für diskrete und auch für stetige Verteilungen und der Kolmogorov-Smirnow-Test für stetige Verteilungen. Sie zählen zu den verteilungsunabhängigen Tests. Die χ^2 - Verteilung ist eine sehr vielseitig anwendbare Verteilung der statistischen Theorie. Sie dient hauptsächlich zur Prüfung der Übereinstimmung zwischen beobachteten und theoretischen Verteilungen und zur Prüfung der Übereinstimmung zwischen beobachteten und theoretischen Streuungen.

Die Chi-Quadrat-Verteilung wurde von Friedrich Robert Helmert (1843 - 1917) im Jahr 1876 abgeleitet, geriet aber in Vergessenheit. Karl Pearson (1857 - 1936) entdeckte 1900 die χ^2 - Verteilung wieder und entwickelte den χ^2 - Anpassungstest. Mit dieser Prüfgröße lässt sich zum Beispiel an Hand einer Serie von Würfen testen, ob ein Würfel manipuliert wurde. Weitere Beispiele sind: Ist die Verteilung der Nachkommastellen der Zahl Pi (π) wesentlich oder zufällig? Schwanken die Geburtenzahlen in den 12 Monaten eines Jahres nur zufallsbedingt oder signifikant? Man teste die Hypothese, dass eine Stichprobe einer normalverteilten Grundgesamtheit entstammt. Zuletzt sei die Mendel'sche Theorie als Beispiel für diesen Test genannt.

Literaturnachweis:

Bernoulli, Jakob: Wahrscheinlichkeitsrechnung: I., II., III. und IV. Theil = Ars conjectandi / von Jakob Bernoulli. Uebers. und hrsg. von R. Haussner. – Nachdr. der Ausg. 1713. – Thun; Frankfurt am Main 1999

Biermann, Kurt-R. und Faak, Margot: G.W. Leibniz und die Berechnung der Sterbewahrscheinlichkeit bei J. de Witt. In: Forschungen und Fortschritte. Nachrichtenblatt der deutschen Wissenschaft und Technik. Berlin Juni 1959

Leibniz, Gottfried Wilhelm: Hauptschriften zur Versicherungs- und Finanzmathematik. Hrsg. von Eberhard Knobloch und J.-Matthias Graf von der Schulenburg. Berlin 2000

Mandelbrot, Benoît B.: Die fraktale Geometrie der Natur / Benoît B. Mandelbrot. [Übers. aus dem Engl.: Reinhilt Zähle; Ulrich Zähle. Hrsg. d. dt. Ausg.: Ulrich Zähle]. - Basel; Boston 1987

Menges, Günter: Grundriß der Statistik. 1. Theorie. Köln 1968

Tabelle der Binomialkoeffizienten

n	n!
2	2
3	6
4	24
5	120
6	720
7	5040
8	40320
9	362880
10	3628800
11	39916800
12	479001600
13	6227020800
14	87178291200
15	1307674368000
16	20922789888000
17	355687428096000
18	6402373705728000
19	121645100408832000
20	2432902008176640000
21	51090942171709440000
22	1124000727777607680000
23	25852016738884976640000
24	620448401733239439360000
25	15511210043330985984000000
26	403291461126605635584000000
27	10888869450418352160768000000
28	304888344611713860501504000000
29	8841761993739701954543616000000
30	265252859812191058636308480000000
31	8222838654177922817725562880000000
32	263130836933693530167218012160000000
33	8683317618811886495518194401280000000
34	295232799039604140847618609643520000000
35	10333147966386144929666651337523200000000
36	371993326789901217467999448150835200000000
37	13763753091226345046315979581580902000000000
38	523022617466601111760007224100074050000000000
39	20397882081197443358640281739902886000000000000
40	815915283247897734345611269596115290000000000000
41	33452526613163807108170062053440692000000000000000
42	1405006117752879898543142606244508600000000000000000
43	60415263063373835637355132068513858000000000000000000
44	2658271574788448768043625811014608500000000000000000000
45	119622220865480194561963161495657350000000000000000000000

Berechnung des Verfassers